Die harmonische Analyse der Gezeitenbeobachtungen.

Von

Prof. Dr. Börgen.

PRESENTED
TO
THE UNIVERSITY OF TORONTO
BY
Miss Campbell, Toronto

Astron.

Die harmonische Analyse

der

Gezeitenbeobachtungen.

Von

Prof. Dr. **Börgen** in Wilhelmshaven.

100024
15/12/09.

Berlin 1885.
Ernst Siegfried Mittler & Sohn
Königliche Hofbuchhandlung
Kochstrasse 69. 70.

Besonderer Abdruck aus Ann. d. Hydr. etc. XII. Jahrg. (1884).

Wie bekannt, ist bereits seit längerer Zeit, zuerst unter Leitung von Sir William Thomson, durch Mr. Roberts in *England* die Bearbeitung von stündlichen Wasserstandsbeobachtungen nach der Methode der harmonischen Analyse für eine Reihe von Orten in Angriff genommen, und sind deren Resultate in den „Reports of the british association" veröffentlicht worden. Es finden sich bei diesen Gelegenheiten, namentlich in den „Reports" für 1872, 1876 und 1878, Auseinandersetzungen der Methode, die aber für denjenigen, der nicht schon ganz mit dem Gegenstande vertraut ist, schwer verständlich bleiben müssen, da sie zu skizzenhaft sind.

Aus Anlafs der Bearbeitung der Gezeitenbeobachtungen der indischen Landesaufnahme wandte sich der mit derselben beauftragte Major Baird an Prof. G. H. Darwin, dessen Arbeiten über die Gezeiten bekannt sind, um Rath, und dies wurde die Veranlassung zur Konstituirung eines aus den Herren Professoren Darwin und Adams bestehenden Komitee's und zur Ausarbeitung eines Berichts über die Methode der Bearbeitung der Gezeitenbeobachtungen, welcher in dem „Report of the fifty-third meeting of the british association for the advancement of science held at Southport 1883" erschienen ist.

Dieser von Herrn Darwin verfafste Bericht enthält eine vollständige Theorie der harmonischen Analyse auf Grund der Gleichgewichtstheorie der Gezeiten, und zwar in einer höchst eleganten Form der mathematischen Entwickelung. Aufserdem aber wird in demselben die Praxis der Analyse in klarer und übersichtlicher Weise auseinandergesetzt und durch Beispiele der Formulare sowohl wie der Rechnungen erläutert und durch Hülfstafeln erleichtert, so dafs diese Abhandlung als ein Leitfaden für die harmonische Analyse der Gezeiten gelten kann und auch als solcher gelten soll.

Auf Anordnung des Hydrographischen Amtes soll nun auch das bereits sehr angewachsene, von den an der deutschen Küste aufgestellten selbstregistrirenden Fluthmessern gelieferte Material der Bearbeitung durch die harmonische Analyse unterworfen werden, und hatte Verf. sich deshalb bereits, ehe ihm die Schrift von Darwin bekannt wurde, eingehend mit dieser Frage beschäftigt und die ziemlich weitläufigen Entwickelungen begonnen. Nachdem Darwin's Schrift im Separatabdruck dem Verf. zu Händen gekommen und die Entwickelung (nun im engen Anschlufs an Darwin) zu Ende geführt war, wurden alle Vorbereitungen getroffen, um zunächst an die Bearbeitung eines Jahrganges Beobachtungen von *Helgoland* zu gehen, deren Resultat im Anschlufs an gegenwärtige Arbeit gegeben werden soll. Zur Erläuterung der successive zu veröffentlichenden Ergebnisse der Bearbeitung und um auch Anderen, welche Neigung haben, sich mit der Methode und ihrer Anwendung vertraut zu machen, hierzu Gelegenheit zu geben, erschien es zweckmäfsig, Theorie und Praxis derselben an dieser Stelle ausführlich zu behandeln, um das Zurückgehen auf die schwerer zugängliche englische Arbeit unnöthig zu machen.

Wenn auch die nachfolgende Arbeit sich in engstem Anschlufs an die von Darwin hält, so ist sie doch keine Uebersetzung der letzteren, unterscheidet sich vielmehr dadurch von derselben, dafs die theoretische Betrachtung nicht wie bei Darwin von der Gleichgewichtstheorie ausgeht, sondern von der zuerst von Airy in seinem Werke „Tides and waves" gelehrten Wellentheorie.

Wenn auch darüber kein Zweifel sein kann, dafs die Wellentheorie nicht ohne weiteres in ihrer ganzen Ausdehnung auf grofse Oceane angewendet werden darf, so ist es andererseits ebenfalls nicht zweifelhaft, dafs die allgemeinen Resultate derselben (wie die Wirkung der Reibung u. a.) auch auf diese ausgedehnt werden dürfen und dafs die Tiden,[1]) welche wir in den Flüssen beobachteten, fast vollständig durch die Wellentheorie erklärt werden. Ihre Grundvoraussetzung, dafs das Wasser, auf welches Mond und Sonne ihre Anziehung ausüben, in einem Kanale enthalten ist, ist wohl kaum falscher, als die Grundvoraussetzung der Gleichgewichts- (wie auch der Laplace'schen) Theorie, dafs die ganze Erde mit einer Wasserschicht von gleichmäfsiger oder sich gesetzmäfsig ändernder Tiefe bedeckt sei, und dafs das Princip der letzteren, dafs sich das Wasser in jedem Augenblicke im Zustande des Gleichgewichts d. h. der Ruhe befinde, ein durchaus falsches ist, braucht nicht erst hervorgehoben zu werden, da der bloſse Anblick einer den Gezeiten unterworfenen Wassermasse zeigt, dafs das Problem der Gezeiten ein Problem der Bewegung, also ein hydrodynamisches und nicht ein hydrostatisches ist. Wenn man trotzdem immer wieder die Gleichgewichtstheorie zur Grundlage der Untersuchungen macht, so liegt dies einfach darin, dafs diese Theorie auf äufserst einfachem Wege auf die Grundgleichungen der Gezeitentheorie führt. Man geht dann auf die in der Natur vorkommenden Erscheinungen über, indem man sagt, die Erfahrung habe gelehrt, dafs in der Natur die Gezeitenerscheinung sich zwar nach den von der Gleichgewichtstheorie gelieferten Gesetzen vollziehe, dafs aber ihre Höhe für jeden Ort eine andere sei, und dafs ihre Phase sich gegen die theoretisch ermittelte verschiebe, dafs also für jeden Ort ein Erfahrungs-Koëfficient und eine Winkelgröfse bestimmt werden müsse, mit welchem die theoretische Fluthhöhe zu multipliciren sei und um welche die theoretische Phase geändert werden müsse.

Der Ursprung und der mathematische Ausdruck für diese Gröfsen, wodurch dieselben in Abhängigkeit von den an dem betreffenden Orte stattfindenden Verhältnissen gebracht werden, bleiben völlig unbestimmt; es sind eben einfache Erfahrungsgröfsen. Die Wellentheorie dagegen giebt (bis zu einem gewissen Grade) darüber Rechenschaft, aus welchen Ursachen dieselben stammen und wie sie von lokalen Verhältnissen abhängen, und es ist eine interessante Aufgabe, zu vergleichen, ob Erfahrung und Theorie sich gegenseitig bestätigen oder nicht.

Aus diesen Gründen erschien es wünschenswerth, von vornherein von der Airy'schen Wellentheorie auszugehen und die ganze Entwickelung auf dieser aufzubauen, umsomehr als man bei allen Anwendungen auf Fälle der Natur genöthigt ist, auf dieselbe zurückzukommen, wie man ja auch von einer Fluthwelle als von etwas ganz Selbstverständlichem spricht, obwohl dies ganz unlogisch ist, sobald man die Gleichgewichtstheorie zu Grunde legt.

Was die mathematische Behandlung anlangt, so schliefst sich dieselbe an die Entwickelungen in Airy's Werk an, nur haben wir uns auf den Fall eines Kanals von der Gestalt eines gröfsten Kreises beschränkt, und es sind in der Bezeichnung solche Aenderungen vorgenommen worden, dafs dieselbe mit der in Darwin's Abhandlung übereinstimmt, weil ein enger Anschlufs an diese im Interesse unmittelbarer Vergleichbarkeit der beiderseitigen Resultate geboten erscheint. Bei den Entwickelungen ist ein Weg eingeschlagen worden, der sich von dem von Darwin befolgten im wesentlichen nur dadurch unterscheidet, dafs wir durchweg anstatt rechtwinkliger Koordinaten sphärische Dreiecke benutzen, weil dies im allgemeinen eine einfachere und Vielen geläufigere Anschauung gewährt; auch sind die Zwischenglieder nur soweit unterdrückt, als es zulässig erschien, ohne undeutlich zu werden.

Die Hauptsache bei der nachfolgenden, wie bei der Arbeit von Darwin bildet die Anweisung zur praktischen Ausführung der harmonischen Analyse. Dieselbe ist natürlich in beiden ganz gleich, doch hat sich der Verfasser bemüht, auch hierin die Darwin'sche Schrift zu ergänzen, namentlich indem Tabellen hinzugefügt worden sind, welche für die wichtigsten Tiden die zur richtigen Zusammenfassung der stündlichen Wasserstände bei Ableitung der

[1]) Wir gebrauchen nach dem Vorgange von Lenz in „Fluth und Ebbe u. s. w." diesen an der Nordseeküste gebräuchlichen Ausdruck, wobei wir noch bemerken, dafs derselbe nicht vom englischen „tide" abgeleitet ist, sondern ein gut deutsches Wort ist und mit langem i gesprochen wird.

betreffenden Tide, wie auch zur Kontrole der richtigen Eintragung in die Formulare nöthigen Zahlenangaben enthalten. Bei den sonst noch beigegebenen Tabellen, welche meist der Arbeit von Darwin entnommen sind, ist die Inconsequenz derselben, dafs theils Bruchtheile von Graden, theils Grade, Minuten und Sekunden angewendet werden, zu Gunsten der ersteren vermieden worden; auch sind in der Tabelle der Reduktionsfaktoren die Logarithmen, nicht, wie bei Darwin, die Zahlen selbst, gegeben worden.

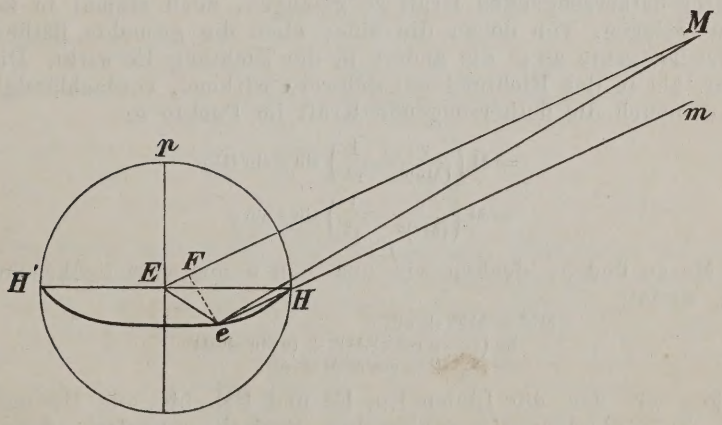
Es ist demnach zu hoffen, dafs die gegenwärtige Abhandlung Jeden, der mit der Elementarmathematik vertraut ist, in den Stand setzen werde, die harmonische Analyse der Gezeiten zu verstehen und richtig anzuwenden.

§ 1.
Entwickelung der Ausdrücke für die flutherzeugende Kraft und für die Höhe der durch dieselbe erregten Wellen.

Die Wellentheorie setzt voraus, dafs das Wasser, auf welches die Anziehung von Mond und Sonne wirkt, in einem Kanale oder wenigstens in einem Becken enthalten sei, dessen Breite im Vergleich zu seiner Länge sehr klein ist. Die sonstigen Verhältnisse des Kanals, seine Begrenzung, Tiefe u. s. w., können sehr verschiedenartig sein, und daraus entstehen die mannichfaltigen besonderen Erscheinungen der Gezeiten, welche wir an den Küsten und in Flüssen beobachten und die von Airy in seinem schon erwähnten Werke einer eingehenden theoretischen Betrachtung unterworfen werden.

In diesem Kanale entstehen nun durch die Anziehung der Himmelskörper Wellen, welche in diesem besonderen Falle Fluth und Ebbe oder Gezeiten genannt werden, und es wird unsere Aufgabe sein, die mathematischen Ausdrücke für diese Wellenbewegung zu ermitteln. Zu dem Ende wollen wir voraussetzen, dafs der Kanal einen gröfsten Kreis der Erde bilde, dessen Lage sonst aber eine beliebige sein kann. Die flutherzeugende Kraft an einem bestimmten Punkte des Kanals ist diejenige Komponente der störenden Kraft, welche parallel der Längsrichtung (Axe) des Kanals und tangential an dem betreffenden Punkte wirkt.

Fig. 1.



Es sei HeH' der gröfste Kreis, welcher von dem Kanal auf der Erde gebildet wird, p dessen Pol, E der Mittelpunkt der Erde, e der Beobachtungsort am Kanal, für welchen wir die flutherzeugende Kraft suchen. Wir legen nun durch den Mittelpunkt der Erde, E, den anziehenden Himmelskörper M und den Pol des Kanals p eine Ebene, welche die Erde in dem gröfsten Kreise HpH' schneide, und wir bezeichnen $\measuredangle$ pEM mit β und $\measuredangle$ HEe mit η, sowie den Erdradius EH = Ee mit a, endlich sei noch die Entfernung des Himmelskörpers M von der Erde oder ME = r und seine Masse = M. Dann ist die Anziehung, welche der Körper im Mittelpunkt der Erde ausübt:

$$= \frac{M}{(ME)^2} = \frac{M}{r^2}$$

und in dem Punkte e:

$$= \frac{M}{(Me)^2}.$$

Die erstere dieser Kräfte wird in der Richtung EM, die letztere in der Richtung eM ausgeübt. Ziehen wir me parallel mit ME, so ist die Anziehung in e ausgeübt in der Richtung em:

$$= \frac{M}{(Me)^2} \cdot \frac{ME}{Me}$$
$$= \frac{M \cdot r}{(Me)^3}$$

und in der Richtung Ee:

$$= \frac{M}{(Me)^2} \cdot \frac{Ee}{Me}.$$

Diese letztere Kraft, welche in der Richtung der Schwere wirkt, kann vernachlässigt werden, da sie zur Erzeugung der Fluth nichts beiträgt.

Die störende Kraft in dem Punkte e ist nun offenbar der Ueberschufs der in der Richtung em wirkenden Anziehung im Punkte e über die ihr parallele Anziehung im Punkte E, oder es ist störende Kraft in e:

$$= \frac{M \cdot r}{(Me)^3} - \frac{M}{r^2}$$

und zwar wirkt dieselbe parallel der Richtung EM.

Zerlegen wir diese störende Kraft in zwei andere, von denen die eine in der Ebene des Kanals, die andere quer zu demselben wirkt, so wollen wir die letztere vernachlässigen, weil in unserer Voraussetzung die Breite des Kanals gegenüber seiner Länge als unbedeutend angenommen wird und daher in der Richtung der Breite derselben keine wahrnehmbaren Tiden entstehen können. Die erstere wird aber:

$$= M\left(\frac{r}{(Me)^3} - \frac{1}{r^2}\right) \cos MEH$$
$$= M\left(\frac{r}{(Me)^3} - \frac{1}{r^2}\right) \sin \beta$$

Diese Komponente wirkt parallel der Richtung EH, wir haben sie daher, um zu unserer flutherzeugenden Kraft zu gelangen, noch einmal in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine, eben die gesuchte flutherzeugende Kraft, in der Tangente an e, die andere in der Richtung Ee wirkt. Die letztere kann wieder, als in der Richtung der Schwere wirkend, vernachlässigt werden, und es ist demnach die flutherzeugende Kraft im Punkte e:

$$= M\left(\frac{r}{(Me)^3} - \frac{1}{r^2}\right) \sin \beta \sin HEe$$
(1) $$= M\left(\frac{r}{(Me)^3} - \frac{1}{r^2}\right) \sin \beta \sin \eta$$

Um Me zu finden, denken wir uns von e aus eine Senkrechte eF auf ME gefällt, so ist:

$$Me^2 = MF^2 + eF^2$$
$$= (r - a \cos eEM)^2 + (a \sin eEM)^2$$
$$= r^2 - 2ra \cos eEM + a^2$$

Denken wir uns die Linien Ep, Ee und EM bis ans Himmelsgewölbe verlängert, so wird dort ein sphärisches Dreieck entstehen, dessen Seiten $pe = 90° - Me = \measuredangle MEe$ und $pM = \measuredangle pEM = \beta$ sind, während der zwischen pe und pM eingeschlossene Winkel $epM = \measuredangle eEH = \eta$ ist, daher:

$$\cos Me = \sin pM \cos epM$$

oder:

$$\cos MEe = \sin \beta \cos \eta$$

und:

$$Me^2 = r^2 - 2ra \sin \beta \cos \eta + a^2$$

Dies in (1) eingesetzt und $(Me)^{-3}$ bis auf die zweite Potenz entwickelt, giebt die flutherzeugende Kraft im Punkte e:

$$= \sin \beta \sin \eta \left\{\frac{3\,Ma}{r^3} \sin \beta \cos \eta - \frac{3\,Ma^2}{2\,r^4} + \frac{15}{2} \cdot \frac{Ma^2}{r^4} \sin \beta^2 \cos \eta^2\right\}$$

Diese Kraft sucht das Wasser in der Richtung von e nach H zu bewegen, da wir aber die Länge des Kanals in derselben Richtung messen wollen, in welcher der Winkel η wächst, d. h. in der Richtung von H nach e, so mufs der obige Ausdruck das negative Vorzeichen erhalten, d. h. es ist die flutherzeugende Kraft in e:

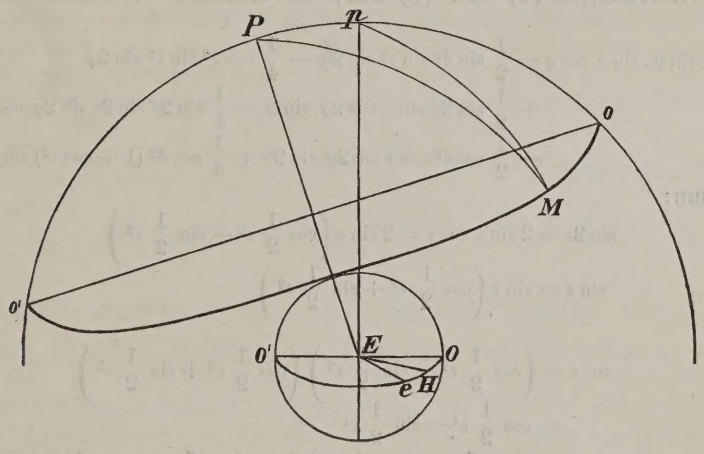
$$(2) \qquad = \sin\beta \sin\eta \left\{ -\frac{3\,Ma}{r^3} \sin\beta \cos\eta + \frac{3}{2} \cdot \frac{Ma^2}{r^4} - \frac{15}{2} \frac{Ma^2}{r^4} \sin\beta^2 \cos\eta^2 \right\}$$

Im Allgemeinen ist es nicht erforderlich, die von der vierten Potenz der Entfernung abhängigen Glieder zu berücksichtigen; wir können daher die Gleichung (2) abkürzen und schreiben: flutherzeugende Kraft in e:

$$(3) \qquad = -\frac{3\,Ma}{r^3} \sin\beta \sin\eta \,.\, \sin\beta \cos\eta$$

Da nun aber das Gestirn nicht immer dieselbe Lage zum Beobachtungsort e beibehält, vielmehr sowohl, infolge der Rotation der Erde, im Laufe eines Tages alle möglichen Stellungen zu demselben einnimmt, als auch, infolge der Bewegung in seiner Bahn, im Laufe eines Umlaufs seinen Ort am Himmel ändert, so sind die beiden Winkel β und η veränderlich, und wir müssen die beiden Funktionen dieser Winkel, welche in der Gleichung (3) vorkommen, durch diejenigen Gröfsen ausdrücken, durch welche die Stellung des Gestirns am Himmel und zum Beobachtungsort in jedem Augenblick fixirt wird.

Fig. 2.



Zu dem Ende denken wir uns die aus dem Mittelpunkt der Erde nach dem Rotationspol, dem Pol des Kanals, dem Beobachtungsort und dem Gestirn gezogenen Linien bis zum Durchschnitt mit dem Himmelsgewölbe verlängert und durch den Himmelspol P und den Pol p des Kanal einen gröfsten Kreis gelegt, so wollen wir diesen zum Anfangsmeridian für die Zählung der Winkel machen. Infolge der täglichen Rotation der Erde beschreibt das Gestirn M einen kleinen Kreis oMo' um den Pol P; die Punkte p, M, H, E liegen wie vorher in einer Ebene, ebenso die Punkte P, p, o, O, E. Es sei nun die Deklination des Gestirns $= \delta$, so ist $PM = 90° - \delta$, ferner sei der Winkel $pPM = \Theta$, dann ändert sich dieser infolge der Rotation der Erde, wenn wir zunächst von der Eigenbewegung der Gestirne absehen, gleichmäfsig mit der Zeit. Die Lage des Kanals auf der Erde wird durch den Abstand seines Pols p vom Rotationspol P bestimmt, welchen wir $Pp = \varepsilon$ setzen, und die Lage des Beobachtungsorts e am Kanal wird definirt durch den Winkel $OEe = \varphi$. Endlich entnehmen wir unserer ersten Figur noch die Bezeichnungen $pM = \beta$ und $HEe = \eta$. Es ist nun offenbar der sphärische Winkel opM = dem ebenen Winkel $OEH = \varphi - \eta$. Wir erhalten nun in dem Dreieck PpM:

$$\frac{\sin\beta}{\cos\delta} = \frac{\sin\Theta}{\sin(\varphi - \eta)}$$

oder:

$$\text{(a)} \qquad \sin\beta\cos\eta\sin\varphi - \sin\beta\sin\eta\cos\varphi = \cos\delta\sin\Theta$$

ferner:

$$\cos\beta\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon\cos(\varphi-\eta) = \sin\delta$$

oder:

$$\text{(b)} \qquad \sin\beta\cos(\varphi-\eta) = \sin\beta\cos\eta\cos\varphi + \sin\beta\sin\eta\sin\varphi = \frac{\cos\beta\cos\varepsilon - \sin\delta}{\sin\varepsilon}$$

Multipliciren wir (a) mit $\sin\varphi$, (b) mit $\cos\varphi$ und addiren, so erhalten wir:

$$\sin\beta\cos\eta = \cos\delta\cos\varphi\sin\Theta + \frac{\cos\beta\cos\varepsilon - \sin\delta}{\sin\varepsilon}\cos\varphi$$

und wird (a) mit $\cos\varphi$, (b) mit $\sin\varphi$ multiplicirt und die erste von der zweiten Gleichung subtrahirt, so wird:

$$\sin\beta\sin\eta = -\cos\delta\cos\varphi\sin\Theta + \frac{\cos\beta\cos\varepsilon - \sin\delta}{\sin\varepsilon}\sin\varphi$$

Wird hierin noch

$$\cos\beta = \cos\varepsilon\sin\delta + \sin\varepsilon\cos\delta\cos\Theta$$

eingesetzt, so erhalten wir endlich:

$$\text{(4)} \qquad \sin\beta\sin\eta = -\sin\delta\sin\varepsilon\sin\varphi + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\varphi\cos\Theta - \cos\delta\cos\varphi\sin\Theta$$

$$\text{(5)} \qquad \sin\beta\cos\eta = -\sin\delta\sin\varepsilon\cos\varphi + \cos\delta\cos\varepsilon\cos\varphi\cos\Theta + \cos\delta\sin\varphi\sin\Theta$$

Diese Ausdrücke sind nun in (3) einzusetzen. Führen wir die Multiplikation der Gleichungen (4) und (5) aus, so erhalten wir nach leichten Umformungen:

$$\begin{aligned}\sin\beta\sin\eta\,.\,\sin\beta\cos\eta = {} & \frac{1}{2}\sin\delta^2\sin\varepsilon^2\sin 2\varphi - \frac{1}{4}\cos\delta^2\sin\varepsilon^2\sin 2\varphi \\ & + \frac{1}{2}\sin 2\delta\sin\varepsilon\cos 2\varphi\sin\Theta - \frac{1}{4}\sin 2\delta\sin 2\varepsilon\sin 2\varphi\cos\Theta \\ & - \frac{1}{2}\cos\delta^2\cos\varepsilon\cos 2\varphi\sin 2\Theta + \frac{1}{4}\cos\delta^2(1+\cos\varepsilon^2)\sin 2\varphi\cos 2\Theta\end{aligned}$$

Da nun:

$$\sin 2\varepsilon = 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon = 2\sin\varepsilon\left(\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)$$

$$\sin\varepsilon = \sin\varepsilon\left(\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)$$

und

$$\begin{aligned}\cos\varepsilon &= \left(\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\left(\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\right) \\ &= \cos\frac{1}{2}\varepsilon^4 - \sin\frac{1}{2}\varepsilon^4 \\ 1+\cos\varepsilon^2 &= \left(\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)^2 + \left(\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)^2 \\ &= 2\left(\cos\frac{1}{2}\varepsilon^4 + \sin\frac{1}{2}\varepsilon^4\right)\end{aligned}$$

so ergiebt sich nach einigen Umformungen leicht:

$$\begin{aligned}\sin\beta\sin\eta\,.\,\sin\beta\cos\eta = {} & \frac{1}{2}\sin\varepsilon^2\left(1-\frac{3}{2}\cos\delta^2\right)\sin 2\varphi \\ & + \sin 2\delta\left\{\frac{1}{2}\sin\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin(\Theta+2\varphi) + \frac{1}{2}\sin\varepsilon\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin(\Theta-2\varphi)\right\} \\ & + \cos\delta^2\left\{\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\varepsilon^4\sin(2\Theta+2\varphi) - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varepsilon^4\sin(2\Theta-2\varphi)\right\}\end{aligned}$$

Dies in (3) eingesetzt erhalten wir für die flutherzeugende Kraft den Ausdruck:

$$\begin{aligned}\text{(6)} \quad \sum_{\iota=0}^{\iota=2\iota_1} H\sin(\iota t \pm 2\varphi) = {} & \frac{3\,Ma}{r^3}\cdot\frac{1}{2}\sin\varepsilon^2\left(\frac{3}{2}\cos\delta^2 - 1\right)\sin 2\varphi \\ & + \frac{3\,Ma}{r^3}\sin 2\delta\left\{-\frac{1}{2}\sin\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin(\Theta+2\varphi) - \frac{1}{2}\sin\varepsilon\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin(\Theta-2\varphi)\right\} \\ & + \frac{3\,Ma}{r^3}\cos\delta^2\left\{-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\varepsilon^4\sin(2\Theta+2\varphi) + \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varepsilon^4\sin(2\Theta-2\varphi)\right\}\end{aligned}$$

Indem wir links als allgemeines Glied dieses Ausdrucks die Form $H \sin(\iota t \pm 2\varphi)$ annehmen, haben wir ι successive $= 0 = \iota_1$ und $= 2\iota_1$ zu setzen, wenn wir die Aenderung, welche der Winkel Θ mit der Zeit erfährt $= \iota_1$ setzen.

Die Wellentheorie[1]) zeigt nun, dafs durch die Kraft $H \sin(\iota t \pm mx)$ Wellen erzeugt werden, deren Erhebung K über dem mittleren Niveau des Wassers ausgedrückt wird durch:

$$K = \pm \frac{H \,.\, km}{\iota^2 - gkm^2} \cos(\iota t \pm mx), \tag{7}$$

worin die noch nicht erklärten Buchstaben folgende Bedeutung haben. Die Tiefe des Wassers, von dem mittleren Niveau gemessen, ist mit k, die Konstante der Schwere mit g und der Abstand des Beobachtungsortes von dem Anfangspunkt des Kanals (hier die Länge des Bogens Oe) mit x bezeichnet, und m ist $= \frac{2\pi}{\lambda}$, wenn λ die Länge der Welle bedeutet. In dem gegenwärtigen Falle, wo wir es mit sogenannten gezwungenen Wellen zu thun haben, wird $\lambda =$ dem halben Umfange des Kanals, d. h. $= \pi a$, und es ist daher $m = \frac{2}{a}$, und da noch $x = a \,.\, \varphi$, so wird

$$K = \pm \frac{H \,.\, 2ka}{a^2\iota^2 - 4gk} \cos(\iota t \pm 2\varphi) \tag{8}$$

Wenden wir diese Gleichung auf (6) an, so wird die Gesammthöhe der Welle:

$$\begin{aligned} h = &- \frac{3Ma^2}{r^3} \cdot \frac{1}{4g} \sin\varepsilon^2 \cos 2\varphi \left(\frac{3}{2}\cos\delta^2 - 1\right) \\ &+ \frac{3Ma^2}{r^3} \frac{k}{a^2\iota_1^2 - 4gk} \sin 2\delta \left\{ - \sin\varepsilon \sin\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos(\Theta + 2\varphi) + \sin\varepsilon \cos\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos(\Theta - 2\varphi)\right\} \\ &+ \frac{3Ma^2}{r^3} \frac{k}{4a^2\iota_1^2 - 4gk} \cos\delta^2 \left\{ - \sin\frac{1}{2}\varepsilon^4 \cos(2\Theta + 2\varphi) - \cos\frac{1}{2}\varepsilon^4 \cos(2\Theta - 2\varphi)\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

Die Ausdrücke der zweiten und dritten Zeile enthalten innerhalb der $\{-\}$ zwei Glieder, die sich durch ihre Koëfficienten und durch den Umstand unterscheiden, dafs 2φ mit verschiedenem Vorzeichen auftritt. Dies beweist, dafs zwei Wellen entstehen, welche von verschiedener Gröfse sind und in entgegengesetzter Richtung den Kanal durchlaufen. An dem Beobachtungsorte erscheinen sie aber nur als eine Welle, für welche der mathematische Ausdruck sich leicht angeben läfst. Die Glieder in der $\{-\}$ haben die Form:

$$A \cos(\alpha + 2\varphi) + B \cos(\alpha - 2\varphi)$$

Lösen wir die Kosinusse auf, so erhalten wir:

$$(A + B) \cos 2\varphi \cos\alpha - (A - B) \sin 2\varphi \sin\alpha$$

Setzen wir nun $(A + B) \cos 2\varphi = L \cos\psi$ und $-(A - B) \sin 2\varphi = L \sin\psi$, so ist:

$$A \cos(\alpha + 2\varphi) + B \cos(\alpha - 2\varphi) = L \cos(\alpha - \psi) = \sqrt{(A+B)^2 \cos 2\varphi^2 + (A-B)^2 \sin 2\varphi^2}\, \cos(\alpha - \psi),$$

wo $\operatorname{tg}\psi = -\frac{A - B}{A + B} \operatorname{tg} 2\varphi$

Für die Glieder der zweiten Zeile ist:

$$A = -\sin\varepsilon \sin\frac{1}{2}\varepsilon^2 \text{ und } B = +\sin\varepsilon \cos\frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

also $$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\cos\varepsilon}, \quad L_1 = \sin\varepsilon \sqrt{\cos\varepsilon^2 \cos 2\varphi^2 + \sin 2\varphi^2}$$

---

[1]) Tides and waves Art. (274) bis (284).

Für die Glieder der dritten Zeile ist:

$$A = -\sin\frac{1}{2}\varepsilon^4 \text{ und } B = -\cos\frac{1}{2}\varepsilon^4,$$

daher

$$\operatorname{tg}\psi_2 = \frac{2\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon^2}\operatorname{tg} 2\varphi \quad \text{und}$$

$$L_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varepsilon^2\right)^2\cos 2\varphi^2 + \cos\varepsilon^2 \sin 2\varphi^2}$$

Setzen wir noch $L_0 = -\sin\varepsilon^2\cos 2\varphi$, so können wir den Ausdruck (9) auch schreiben:

(10)
$$h = \frac{3Ma^2}{r^3}\cdot\frac{1}{4g}L_0\left(\frac{3}{2}\cos\delta^2 - 1\right)$$
$$+\frac{3Ma^2}{r^3}\cdot\frac{k}{a^2\iota_1^2 - 4gk}\sin 2\delta\, L_1\cos(\Theta - \psi_1)$$
$$+\frac{3Ma^2}{r^3}\cdot\frac{k}{4a^2\iota_1^2 - 4gk}\cos\delta^2 L_2\cos(2\Theta - \psi_2)$$

Es ist noch zu bemerken, dafs L_0, L_1, L_2 und ψ_1, ψ_2 nur von der Lage des Kanals auf der Erde und der Lage des Beobachtungsortes am Kanal abhängen, also als Lokalgröfsen bezeichnet werden können.

Das erste Glied des Ausdrucks (10) ist von Θ unabhängig, es stellt daher keine eigentliche Tide dar, sondern eine langsame Veränderung des mittleren Wasserstandes, welche erst nach einer längeren Periode wieder auf ihren ursprünglichen Werth zurückkehrt; wir nennen daher die aus diesem Gliede entspringenden Wellen: Tiden von langer Periode. Die durch das zweite Glied gegebenen Wellen durchlaufen alle ihre Phasen in derselben Zeit, in welcher Θ von 0° bis 360° wächst, und da der Haupttheil von Θ von der Rotation der Erde abhängt, so durchlaufen diese Wellen ihre Phasen im Laufe von nahe einem Tage, und wir nennen sie daher: eintägige Tiden. Ebenso nennen wir die durch das dritte Glied gegebenen Wellen: halbtägige Tiden, weil sie alle ihre Phasen in derselben Zeit vollenden, in welcher 2Θ von 0° bis 360° wächst, d. h. nahe in einem halben Tage.

Kommt noch ein zweiter anziehender Körper (die Sonne) hinzu, so entstehen, ebenso wie wir dies im Vorhergehenden für den Mond auseinandergesetzt haben, Wellen, für die man demnach die mathematischen Ausdrücke nach Analogie sofort hinschreiben kann, indem man in dem Ausdruck (10) nur für M, r, δ, ι_1 und Θ die der Sonne zugehörigen Werthe einsetzt. Die Gesammthöhe der Tide findet sich nach dem Gesetz der Superposition der Wellen einfach als Summe der Einzeltiden.

§ 2.

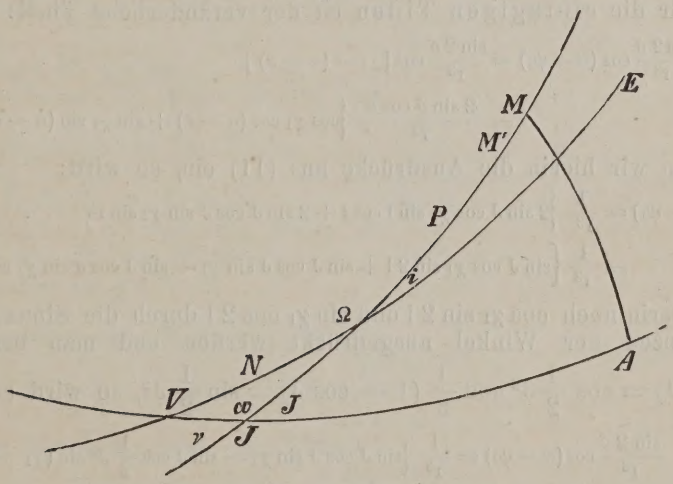
Aufgabe der harmonischen Analyse und Entwickelung der Ausdrücke für die Höhe des Wasserstandes durch einfach harmonische Glieder.

Der in Formel (6) angewendete allgemeine Ausdruck für die flutherzeugende Kraft $H\sin(\iota t \pm mx)$ setzt voraus, 1) dafs der Koëfficient H von der Zeit unabhängig, also mit Bezug auf diese konstant sei, und 2) dafs der Winkel $(\iota t \pm mx)$ sich gleichförmig mit der Zeit ändere, und wir haben, indem wir die erwähnte Form auf den Ausdruck (6) anwendeten, stillschweigend vorausgesetzt, dafs rechts diese beiden Voraussetzungen erfüllt seien. Dies ist nun nicht der Fall, denn sowohl r wie δ sind mit der Zeit veränderlich, es trifft also die Voraussetzung der Konstanz von H nicht zu, und ebenso wenig ist die Aenderung, welche Θ mit der Zeit erfährt, eine gleichförmige. Es ist nun aber möglich, jede sich gesetzmäfsig mit der Zeit ändernde Funktion, in beliebiger Annäherung, durch die Summe einer Anzahl von Gliedern darzustellen, von denen jedes aus einem konstanten, d. h. von der Zeit unabhängigen Faktor, multiplicirt mit einer trigonometrischen Funktion eines sich gleichförmig mit der Zeit ändernden Winkels besteht. Jedes dieser Glieder hat demnach die Form $H\sin(\iota t \pm mx)$. Wir können dann die Sache so auffassen, als wenn jedes Glied für sich eine flutherzeugende Kraft darstelle, durch welche in dem Kanal ebenso viele Wellen erregt werden, deren Form durch Gl. (7) gegeben ist und aus deren Superposition die Gesammtwelle entspringt.

Jedes Glied von der Form $H \sin (\iota t \pm mx)$ heifst ein einfach harmonisches Glied, und die Aufgabe der harmonischen Analyse besteht demnach darin, die Gleichung (6) in eine Reihe von einfach harmonischen Gliedern zu entwickeln, mit Hülfe der Gleichung (7) den Ausdruck für die jedem Gliede entsprechende Welle zu ermitteln, deren Summirung endlich den Ausdruck für die Höhe des Wasserstandes über dem mittleren Niveau zu irgend einer Zeit giebt. Zu demselben Resultat gelangt man natürlich auch, wenn diese Entwickelung an der Gleichung (10) vorgenommen wird, wodurch wir sofort die Höhe des Wasserstandes erhalten, ohne erst auf die flutherzeugende Kraft zurückzugehen, es ist jedoch dabei wohl zu beachten, dafs das in den Coëfficienten vorkommende ι, für jedes Glied verschieden ist, weil es die der Zeit proportionale Aenderung des jedesmal unter dem Kosinuszeichen stehenden Winkels bedeutet. Wir werden dies letztere Verfahren einschlagen, also die Entwickelung direkt an Gl. (10) vornehmen, um Wiederholungen langer Ausdrücke, die sich wenig von einander unterscheiden, zu vermeiden.

Zunächst wollen wir bemerken, dafs der Winkel Θ der Stundenwinkel des Gestirns, vom Meridian Pp aus gerechnet, ist. Dieser unterscheidet sich von dem, von dem Meridian des Beobachtungsorts aus gerechneten Stundenwinkel nur durch eine Konstante, nämlich die Längendifferenz der beiden Meridiane; wir können daher Θ ebenso gut als Stundenwinkel des Gestirns am Beobachtungsorte selbst auffassen und den Längenunterschied beider Meridiane dem Winkel ψ_1 bezw. ψ_2 hinzufügen. Wir nehmen in Zukunft an, dafs dies geschehen sei, wollen aber deswegen die bisher angewendete Bezeichnung nicht ändern.

Fig. 3.



Es sei in der nebenstehenden Figur V der Frühlingspunkt, VA der Himmelsäquator, VE die Ekliptik, JΩM die Mondbahn, M der wahre Ort des Mondes in seiner Bahn, dann ist $VA = \alpha$ die Rektascension, $MA = \delta$ die Deklination des Mondes zur Zeit t. Nennen wir noch den Durchschnittspunkt J der Mondbahn mit dem Aequator den Intersektionspunkt und setzen die Rektascension dieses Punktes $VJ = \nu$, die Neigung der Bahn gegen den Aequator $= J$ und endlich die wahre Länge des Mondes in der Bahn vom Intersektionspunkt aus gerechnet $JM = l$, so erhalten wir in dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $JMA : JA = (\alpha - \nu)$ und

$$(11) \quad \begin{cases} \cos(\alpha - \nu) = \dfrac{\cos l}{\cos \delta} \\ \sin(\alpha - \nu) = \dfrac{\cos J \sin l}{\cos \delta} \\ \sin \delta = \sin J \sin l \end{cases}$$

Der Stundenwinkel ist stets = Sternzeit — Rektascension und Sternzeit = mittlere Ortszeit + mittlere Länge der Sonne = t + h, wenn wir erstere mit t und letztere mit h bezeichnen, also:

$$\begin{aligned}\Theta &= t + h - \alpha \\ &= t + h - \nu - (\alpha - \nu)\end{aligned}$$

Setzen wir $t + h - \nu - \psi_1 = \chi_1$, und $2\,(t + h - \nu) - \psi_2 = 2\,\chi_2$, so ist:

$$\begin{aligned}\Theta - \psi_1 &= \chi_1 - (\alpha - \nu) \\ 2\,\Theta - \psi_2 &= 2\,\chi_2 - 2\,(\alpha - \nu)\end{aligned}$$

Indem wir diese Werthe in (10) einsetzen, wird es bequem sein die drei am Schlufs des § 1 unterschiedenen Arten von Tiden getrennt zu behandeln und zunächst von den von der Zeit unabhängigen Koëfficienten abzusehen.

1) Für die Tiden von langer Periode kommt in Betracht der Ausdruck

$$\frac{1}{r^3}\left(\frac{3}{2}\cos\delta^2 - 1\right)$$

Werden die Formeln für $\cos(\alpha - \nu)$ und $\sin(\alpha - \nu)$ quadrirt und addirt, so wird:

$$1 = \frac{\cos l^2 + \cos J^2 \sin l^2}{\cos\delta^2} = \frac{1 - \sin J^2 \sin l^2}{\cos\delta^2}$$

oder wenn wir $\sin l^2$ durch $\cos 2l$ ausdrücken:

$$\cos\delta^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\sin J^2\right) + \frac{1}{2}\sin J^2 \cos 2l$$

mithin:

$$(12)\quad \frac{1}{r^3}\left(\frac{3}{2}\cos\delta^2 - 1\right) = \frac{1}{2\,r^3}\left\{\left(1 - \frac{3}{2}\sin J^2\right) + \frac{3}{2}\sin J^2 \cos 2l\right\}$$

2) Für die eintägigen Tiden ist der veränderliche Theil:

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\delta}{r^3}\cos(\Theta - \psi_1) &= \frac{\sin 2\delta}{r^3}\cos[\chi_1 - (\alpha - \nu)] \\ &= \frac{2\sin\delta\cos\delta}{r^3}\left\{\cos\chi_1\cos(\alpha - \nu) + \sin\chi_1\sin(\alpha - \nu)\right\}\end{aligned}$$

Setzen wir hierin die Ausdrücke aus (11) ein, so wird:

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\delta}{r^3}\cos(\Theta - \psi_1) &= \frac{1}{r^3}\left\{2\sin J\cos\chi_1\sin l\cos l + 2\sin J\cos J\sin\chi_1\sin l^2\right\} \\ &= \frac{1}{r^3}\left\{\sin J\cos\chi_1\sin 2l + \sin J\cos J\sin\chi_1 - \sin J\cos J\sin\chi_1\cos 2l\right\}\end{aligned}$$

und wenn hierin noch $\cos\chi_1 \sin 2l$ und $\sin\chi_1 \cos 2l$ durch die Sinus der Summen und Differenzen der Winkel ausgedrückt werden und man beachtet, dafs $\frac{1}{2}(1 + \cos J) = \cos\frac{1}{2}J^2$ und $\frac{1}{2}(1 - \cos J) = \sin\frac{1}{2}J^2$, so wird endlich:

$$\begin{aligned}(13)\quad \frac{\sin 2\delta}{r^3}\cos(\Theta - \psi_1) = \frac{1}{r^3}\Big\{&\sin J\cos J\sin\chi_1 - \sin J\cos\tfrac{1}{2}J^2\sin(\chi_1 - 2l) \\ &+ \sin J\sin\tfrac{1}{2}J^2\sin(\chi_1 + 2l)\Big\}\end{aligned}$$

3) Für die halbtägigen Tiden ist:

$$\begin{aligned}\frac{\cos\delta^2}{r^3}\cos(2\Theta - \psi_2) &= \frac{\cos\delta^2}{r^3}\cos[2\chi_2 - 2(\alpha - \nu)] \\ &= \frac{\cos\delta^2}{r^3}\left\{\cos 2\chi_2\cos 2(\alpha - \nu) + \sin 2\chi_2\sin 2(\alpha - \nu)\right\}\end{aligned}$$

Wie man leicht übersieht, ist

$$\begin{aligned}\cos 2(\alpha - \nu) &= \frac{1}{\cos\delta^2}\left\{\frac{1}{2}\sin J^2 + \frac{1}{2}(1 + \cos J^2)\cos 2l\right\} \\ \sin 2(\alpha - \nu) &= \frac{1}{\cos\delta^2}\cos J\sin 2l\end{aligned}$$

Dies eingesetzt und beachtet, dafs $1 + \cos J^2 = 2\left(\cos\frac{1}{2}J^4 + \sin\frac{1}{2}J^4\right)$ und $\cos J = \cos\frac{1}{2}J^4 - \sin\frac{1}{2}J^4$ ist, wird:

$$(14)\quad \frac{\cos\delta^2}{r^3}\cos(2\Theta-\psi_2)=\frac{1}{r^3}\left\{\frac{1}{2}\sin J^2\cos 2\chi_2+\cos\frac{1}{2}J^4\cos(2\chi_2-2l)\right.$$
$$\left.+\sin\frac{1}{2}J^4\cos(2\chi_2+2l)\right\}$$

Die Gleichungen (12), (13) und (14) sind den Gleichungen (12) bei Darwin ganz analog.

Wir haben nun die mit der Zeit ungleichförmig veränderlichen Gröfsen auf l, die wahre Länge des Mondes in der Bahn, und r, den Radius vector, reducirt, welche beide durch bekannte Formeln der Astronomie in Reihen verwandelt werden, deren Glieder der Zeit proportional wachsende Winkelgröfsen enthalten.

Zu dem Ende führen wir folgende Bezeichnungen ein, denen wir zur Uebersicht die schon erklärten, welche für die Folge von Bedeutung sind, wieder beifügen:

Mittlere Länge des Mondes in der Bahn $= s$
Mittlere Bewegung des Mondes in der Zeiteinheit $= \sigma$
Länge des Perigäums der Mondbahn $= p$
Bewegung des Perigäums in der Zeiteinheit $= \varpi$

} Die Längen vom Frühlingspunkt aus, also in zwei Ebenen: bis zum Knoten in der Ekliptik, vom Knoten bis zum mittleren Mondort bezw. Ort des Perigäums in der Bahn gerechnet.

Wahre Länge in der Bahn vom Intersektionspunkt aus gerechnet $= l$
Mittlere Entfernung des Mondes von der Erde $= c$
Radius vector für den wahren Mondort $= r$
Excentricität der Mondbahn $= e$
Masse des Mondes gemessen durch die Acceleration, welche sie hervorbringen würde[1]) $= M$
Mittlere Länge der Sonne $= h$
Mittlere Bewegung der Sonne in der Zeiteinheit $= \eta$
Mittlere Entfernung von der Erde $= c_1$
Excentricität der Bahn $= e_1$
Länge des Perihels der Erdbahn $= p_1$
Masse der Sonne, in derselben Weise gemessen wie die des Mondes[1]) $= S$
Mittlere Sonnenzeit am Ort $= t$

Ferner:

Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn $\Upsilon\Omega = N$
Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik $\Upsilon\Omega J = i$
Neigung der Mondbahn gegen den Aequator $\Upsilon JA = J$
Schiefe der Ekliptik $\Omega\Upsilon J = \omega$
Rektascension des Intersektionspunktes $\Upsilon J = \nu$
$\Upsilon\Omega - \Omega J = N - \Omega J$ $= \xi$

Endlich:

Verhältnifs der Bewegung der Sonne zu der des Mondes $= \frac{\eta}{\sigma} = m$
Rotationsgeschwindigkeit der Erde $= \gamma$
Konstante der Schwere (Acceleration am Beobachtungsort) $= g$
Halbmesser der Erde $= a$

---

[1]) Ist die Masse der Erde $= E$, so bringt sie, indem wir uns dieselbe in ihrem Mittelpunkt vereinigt denken, an der Erdoberfläche die Acceleration $g = \frac{E}{a^2}$ hervor.

Ist daher die Masse des Mondes n, die der Sonne n_1 mal so grofs wie die der Erde, so ist $M = n \cdot g a^2$ und $S = n_1 \cdot g a^2$. Nach den neuesten Bestimmungen ist $n = \frac{1}{81}$, $n_1 = 324\,439$.

Wenn wir auf Figur 3 zurückgehen und den mittleren Mondort mit M' und die mittlere Länge des Mondes vom Intersektionspunkte aus für den Augenblick mit σ_1 bezeichnen, so sieht man sofort, dafs:

$$JM' = \sigma_1 = J\Omega + \Omega M'$$

und die mittlere Länge vom Frühlingspunkte aus

$$s = V\Omega + \Omega M'$$

mithin:

$$s - \sigma_1 = V\Omega - \Omega J = \xi$$

oder

$$\sigma_1 = s - \xi$$

ist.

Ebenso ergeben sich aus dem Dreieck $V\Omega J$ zur Bestimmung von J, ν und ξ die Gleichungen:

$$(15) \quad \begin{cases} \cos J = \cos i \cos \omega - \sin i \sin \omega \cos N \\ \cot \nu \sin N = \cos N \cos \omega + \cot i \sin \omega \\ \cot (N - \xi) \sin N = \cos N \cos i + \cot \omega \sin i \end{cases}$$

Nach der Theorie der elliptischen Bewegung ist nun, da $s - p =$ der mittleren Anomalie:

$$l - \sigma_1 = + 2 e \sin (s - p) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2 (s - p) + \ldots.$$

oder

$$l = s - \xi + 2 e \sin (s - p) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2 (s - p) + \ldots.$$

und

$$r = c \left\{ 1 + \frac{1}{2} e^2 - e \cos (s - p) - \frac{1}{2} e^2 \cos 2 (s - p) + \ldots. \right\}$$

Hierzu sind noch die wichtigsten Störungsglieder, nämlich die „Evektion" und „Variation" hinzuzufügen, dieselben sind näherungsweise:[1])

$$\text{Evektion in Länge} = + \frac{15}{4} m e \sin (s - 2h + p)$$

$$\text{Evektion im Radius vector} = - \frac{15}{8} m e \cos (s - 2h + p)$$

$$\text{Variation in Länge} = + \frac{11}{8} m^2 \sin 2 (s - h)$$

$$\text{Variation im Radius vector} = - m^2 \cos 2 (s - h)$$

Die vollständigen Ausdrücke für die wahre Länge in der Bahn und den Radius vector, unter Beschränkung auf die vom Quadrat der Excentricität abhängigen und die Hauptstörungsglieder, sind demnach:

$$(16) \quad \begin{cases} l = s - \xi + 2 e \sin (s - p) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2 (s - p) + \frac{15}{4} m e \sin (s - 2h + p) + \frac{11}{8} m^2 \sin 2 (s - h) \\ r = c \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right) - e \cos (s - p) - \frac{1}{2} e^2 \cos 2 (s - p) - \frac{15}{8} m e \cos (s - 2h + p) - m^2 \cos 2 (s - h) \right\} \end{cases}$$

Werden diese Werthe in die Gleichungen (12), (13), (14) eingesetzt, so ist unsere Aufgabe, die Höhe des Wasserstandes als Summe einer Reihe einfach harmonischer Glieder darzustellen, gelöst.

Hierbei kommt es darauf an, die Gröfsen $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^3} \sin \chi_1$, $\frac{1}{r^3} \cos 2\chi_2$, $\frac{1}{r^3} \cos 2l$, $\frac{1}{r^3} \sin (\chi_1 \mp 2l)$ und $\frac{1}{r^3} \cos (2\chi_2 \mp 2l)$ zu entwickeln. Diese können auf die gemeinschaftlichen Formen $\frac{1}{r^3} \cos a$ bezw. $\frac{1}{r^3} \cos (a - 2l)$ gebracht werden, indem

---

[1]) Die wahren Werthe der Evektion und Variation sind nicht unerheblich von diesen verschieden. Nach Professor Adams ist anstatt der aus dem Werthe von m (welcher = 0,074805 ist) folgenden Koëfficienten:

für die Evektion	in Länge	der Koëfficient	0,022233
„ „ „	in Rad. vect.	„ „	0,010022
„ „ Variation	in Länge	„ „	0,011489
„ „ „	in Rad. vect.	„ „	0,008249

zu benutzen. Dies ist bei allen numerischen Vergleichungen zwischen Theorie und Erfahrung zu beachten.

man a successive $= 0, = \chi_1 - \frac{1}{2}\pi = -\chi_1 + \frac{1}{2}\pi$, $= 2\chi_2$ und $= -2\chi_2$ setzt,

weil $\sin\chi = \cos(\chi - \frac{1}{2}\pi)$ und $\cos(\chi + 2l) = \cos(-\chi - 2l)$ u. s. w. ist.

Es ergiebt sich nun:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{c^3}\left\{\left(1 - \frac{3}{2}e^2\right) + 3e\cos(s-p) + \frac{3}{2}e^2\cos 2(s-p) + \frac{45}{8}me\cos(s-2h+p) + 3m^2\cos 2(s-h) + 6e^2\cos(s-p)^2\right\}$$

(17) $$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{c^3}\left\{\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) + 3e\cos(s-p) + \frac{9}{2}e^2\cos 2(s-p) + \frac{45}{8}me\cos(s-2h+p) + 3m^2\cos 2(s-h)\right\}$$

Dies mit cos a multiplicirt, giebt:

(18) $$\begin{aligned}\frac{1}{r^3}\cos a = \frac{1}{c^3}\Big[&\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)\cos a + e\left\{\frac{3}{2}\cos\left(a + (s-p)\right) + \frac{3}{2}\cos\left(a - (s-p)\right)\right\}\\ &+ e^2\left\{\frac{9}{4}\cos\left(a + 2(s-p)\right) + \frac{9}{4}\cos\left(a - 2(s-p)\right)\right\}\\ &+ me\left\{\frac{45}{16}\cos\left(a + (s-2h+p)\right) + \frac{45}{16}\cos\left(a - (s-2h+p)\right)\right\}\\ &+ m^2\left\{\frac{3}{2}\cos\left(a + 2(s-h)\right) + \frac{3}{2}\cos\left(a - 2(s-h)\right)\right\}\Big]\end{aligned}$$

Ferner ist, wenn wir für den Augenblick:

$$P = +2e\sin(s-p) + \frac{5}{4}e^2\sin 2(s-p) + \frac{15}{4}me\sin(s-2h+p) + \frac{11}{8}m^2\sin 2(s-h)$$

setzen:

$$\begin{aligned}\cos(a-2l) &= \cos\left(a - 2(s-\xi) - 2P\right) = \cos 2P\cos\left(a - 2(s-\xi)\right) + \sin 2P\sin\left(a - 2(s-\xi)\right)\\ &= (1 - 2P^2)\cos\left(a - 2(s-\xi)\right) + 2P\sin\left(a - 2(s-\xi)\right)\end{aligned}$$

$$(1 - 2P^2) = (1 - 4e^2) + 4e^2\cos 2(s-p)$$

(a) $$(1-2P^2)\cos\left(a-2(s-\xi)\right) = (1-4e^2)\cos\left(a-2(s-\xi)\right) + e^2\left\{2\cos\left(a - 2(s-\xi) + 2(s-p)\right) + 2\cos\left(a-2(s-\xi)-2(s-p)\right)\right\}$$

(b) $$\begin{aligned}+2P\sin\left(a - 2(s-\xi)\right) = &+ e\left\{-2\cos\left(a - 2(s-\xi) + (s-p)\right) + 2\cos\left(a - 2(s-\xi) - (s-p)\right)\right\}\\ &+ e^2\left\{-\frac{5}{4}\cos\left(a - 2(s-\xi) + 2(s-p)\right) + \frac{5}{4}\cos\left(a - 2(s-\xi) - 2(s-p)\right)\right\}\\ &+ me\left\{-\frac{15}{4}\cos\left(a - 2(s-\xi) + (s-2h+p)\right) + \frac{15}{4}\cos\left(a - 2(s-\xi) - (s-2h+p)\right)\right\}\\ &+ m^2\left\{-\frac{11}{8}\cos\left(a - 2(s-\xi) + 2(s-h)\right) + \frac{11}{8}\cos\left(a - 2(s-\xi) - 2(s-h)\right)\right\}\end{aligned}$$

Werden (a) und (b) vereinigt, so erhalten wir folgenden Ausdruck für cos (a — 2 l):

$$\begin{aligned}\cos(a-2l) = (1-4e^2)\cos\left(a - 2(s-\xi)\right) &+ e\left\{2\cos\left(a - 2(s-\xi) - (s-p)\right) - 2\cos\left(a - 2(s-\xi) + (s-p)\right)\right\}\\ &+ e^2\left\{\frac{13}{4}\cos\left(a - 2(s-\xi) - 2(s-p)\right) + \frac{3}{4}\cos\left(a - 2(s-\xi) + 2(s-p)\right)\right\}\\ &+ me\left\{\frac{15}{4}\cos\left(a - 2(s-\xi) - (s-2h+p)\right) - \frac{15}{4}\cos\left(a - 2(s-\xi) + (s-2h+p)\right)\right\}\\ &+ m^2\left\{\frac{11}{8}\cos\left(a - 2(s-\xi) - 2(s-h)\right) - \frac{11}{8}\cos\left(a - 2(s-\xi) + 2(s-h)\right)\right\}\end{aligned}$$

Wird dies mit $\frac{1}{r^3}$ multiplicirt, immer unter Beschränkung auf Gröfsen von der Ordnung e^2, so erhalten wir:

(19) $$\begin{aligned}\frac{1}{r^3}\cos(a-2l) = \frac{1}{c^3}\Big[&\left(1 - \frac{5}{2}e^2\right)\cos\left(a - 2(s-\xi)\right) + e\left\{\frac{7}{2}\cos\left(a - 2(s-\xi) - (s-p)\right) - \frac{1}{2}\cos\left(a - 2(s-\xi) + (s-p)\right)\right\}\\ &+ e^2\frac{17}{2}\cos\left(a - 2(s-\xi) - 2(s-p)\right)\\ &+ me\left\{\frac{105}{16}\cos\left(a - 2(s-\xi) - (s-2h+p)\right) - \frac{15}{16}\cos\left(a - 2(s-\xi) + (s-2h+p)\right)\right\}\\ &+ m^2\left\{\frac{23}{8}\cos\left(a - 2(s-\xi) - 2(s-h)\right) + \frac{1}{8}\cos\left(a - 2(s-\xi) + 2(s-h)\right)\right\}\Big]\end{aligned}$$

Werden in (18) und (19) die oben erwähnten Substitutionen für a gemacht, und die so erhaltenen Ausdrücke in (12), (13) und (14) eingesetzt, so erhalten wir:

1) Für die Tiden von langer Periode:

(20)
$$\frac{1}{r^3}\left(\frac{3}{2}\cos\delta^2-1\right)=\frac{1}{2\,c^3}\Big[\Big(1-\frac{3}{2}\sin J^2\Big)\Big\{\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)+e\,.\,3\cos(s-p)+e^2\,.\,\frac{9}{2}\cos 2\,(s-p)$$
$$+m\,e\,\frac{45}{8}\cos(s-2\,h+p)+m^2\,.\,3\cos 2\,(s-h)\Big\}$$
$$+\frac{3}{2}\sin J^2\Big\{\Big(1-\frac{5}{2}e^2\Big)\cos 2\,(s-\xi)+e\Big\{\frac{7}{2}\cos\Big(2\,(s-\xi)+(s-p)\Big)-\frac{1}{2}\cos\Big(2\,(s-\xi)-(s-p)\Big)\Big\}$$
$$+e^2\frac{17}{2}\cos\Big(2\,(s-\xi)+2\,(s-p)\Big)$$
$$+m\,e\Big\{\frac{105}{16}\cos\Big(2\,(s-\xi)+(s-2\,h+p)\Big)-\frac{15}{16}\cos\Big(2\,(s-\xi)-(s-2\,h+p)\Big)\Big\}$$
$$+m^2\Big\{\frac{23}{8}\cos\Big(2\,(s-\xi)+2\,(s-h)\Big)+\frac{1}{8}\cos\Big(2\,(s-\xi)-2\,(s-h)\Big)\Big\}\Big\}\Big]$$

2) Für die Tiden von eintägiger Periode:

(21)
$$\frac{\sin 2\,\delta}{r^3}\cos(\Theta-\psi_1)=$$
$$\frac{1}{c^3}\Big[\Big(1-\frac{5}{2}e^2\Big)\Big\{-\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2\,(s-\xi)-\frac{1}{2}\pi\Big)+\sin J\sin\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1+2\,(s-\xi)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}$$
$$+\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)\sin J\cos J\cos\Big(\chi_1-\frac{1}{2}\pi\Big)$$
$$+\frac{7}{2}e\Big\{-\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2\,(s-\xi)-(s-p)-\frac{1}{2}\pi\Big)+\sin J\sin\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2\,(s-\xi)+(s-p)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}$$
$$+\frac{1}{2}e\Big\{\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2\,(s-\xi)+(s-p)-\frac{1}{2}\pi\Big)-\sin J\sin\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1+2\,(s-\xi)-(s-p)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}$$
$$+\frac{3}{2}e\sin J\cos J\Big\{\cos\Big(\chi_1-(s-p)-\frac{1}{2}\pi\Big)+\cos\Big(\chi_1+(s-p)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}$$
$$+\frac{17}{2}e^2\Big\{-\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2(s-\xi)-2(s-p)-\frac{1}{2}\pi\Big)+\sin J\sin\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1+2\,(s-\xi)+2\,(s-p)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}$$
$$+\frac{9}{4}e^2\sin J\cos J\Big\{\cos\Big(\chi_1-2\,(s-p)-\frac{1}{2}\pi\Big)+\cos\Big(\chi_1+2\,(s-p)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}$$
$$+\frac{105}{16}m\,e\Big\{-\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2(s-\xi)-(s-2\,h+p)-\frac{1}{2}\pi\Big)+\sin J\sin\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1+2(s-\xi)+(s-2h+p)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}$$
$$+\frac{15}{16}m\,e\Big\{\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2\,(s-\xi)+(s-2\,h+p)-\frac{1}{2}\pi\Big)-\sin J\sin\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1+2\,(s-\xi)-(s-2\,h+p)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}$$
$$+\frac{45}{16}me\sin J\cos J\Big\{\cos\Big(\chi_1-(s-2h+p)-\frac{1}{2}\pi\Big)+\cos\Big(\chi_1+(s-2h+p)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}$$
$$+\frac{23}{8}m^2\Big\{-\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2\,(s-\xi)-2\,(s-h)-\frac{1}{2}\pi\Big)+\sin J\sin\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1+2\,(s-\xi)+2\,(s-h)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}$$
$$+\frac{1}{8}m^2\Big\{-\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2\,(s-\xi)+2\,(s-h)-\frac{1}{2}\pi\Big)+\sin J\sin\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1+2\,(s-\xi)-2\,(s-h)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}$$
$$+\frac{3}{2}m^2\sin J\cos J\Big\{\cos\Big(\chi_1-2\,(s-h)-\frac{1}{2}\pi\Big)+\cos\Big(\chi_1+2\,(s-h)-\frac{1}{2}\pi\Big)\Big\}\Big]$$

3) Für die Tiden von halbtägiger Periode:

(22)
$$\frac{\cos\delta^2}{r^3}\cos(2\Theta-\psi_2)=$$
$$\frac{1}{c^3}\Big[\Big(1-\frac{5}{2}e^2\Big)\Big\{\cos\frac{1}{2}J^4\cos\Big(2\chi_2-2\,(s-\xi)\Big)+\sin\frac{1}{2}J^4\cos\Big(2\chi_2+2\,(s-\xi)\Big)+\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)2\cos\frac{1}{2}J^2\sin\frac{1}{2}J^2\cos 2\chi_2\Big\}$$
$$+\frac{7}{2}e\Big\{\cos\frac{1}{2}J^4\cos\Big(2\chi_2-2\,(s-\xi)-(s-p)\Big)+\sin\frac{1}{2}J^4\cos\Big(2\chi_2+2\,(s-\xi)+(s-p)\Big)\Big\}$$
$$+\frac{1}{2}e\Big\{-\cos\frac{1}{2}J^4\cos\Big(2\chi_2-2\,(s-\xi)+(s-p)\Big)-\sin\frac{1}{2}J^4\cos\Big(2\chi_2+2\,(s-\xi)-(s-p)\Big)\Big\}$$
$$+\frac{3}{2}e\,.\,2\cos\frac{1}{2}J^2\sin\frac{1}{2}J^2\Big\{\cos\Big(2\chi_2+(s-p)\Big)+\cos\Big(2\chi_2-(s-p)\Big)\Big\}$$
$$+\frac{17}{2}e^2\Big\{\cos\frac{1}{2}J^4\cos\Big(2\chi_2-2\,(s-\xi)-2(s-p)\Big)+\sin\frac{1}{2}J^4\cos\Big(2\chi_2+2\,(s-\xi)+2\,(s-p)\Big)\Big\}$$

$$+\frac{9}{4}e^2\,2\cos\frac{1}{2}J^2\sin\frac{1}{2}J^2\left\{\cos\left(2\chi_2+2(s-p)\right)+\cos\left(2\chi_2-2(s-p)\right)\right\}$$

$$+\frac{105}{16}me\left\{\cos\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2-2(s-\xi)-(s-2h+p)\right)+\sin\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2+2(s-\xi)+(s-2h+p)\right)\right\}$$

$$+\frac{15}{16}me\left\{-\cos\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2-2(s-\xi)+(s-2h+p)\right)-\sin\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2+2(s-\xi)-(s-2h+p)\right)\right\}$$

$$+\frac{45}{16}me\;2\cos\frac{1}{2}J^2\sin\frac{1}{2}J^2\left\{\cos\left(2\chi_2+(s-2h+p)\right)+\cos\left(2\chi_2-(s-2h+p)\right)\right\}$$

$$+\frac{23}{8}m^2\left\{\cos\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2-2(s-\xi)-2(s-h)\right)+\sin\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2+2(s-\xi)+2(s-h)\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{8}m^2\left\{\cos\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2-2(s-\xi)+2(s-h)\right)+\sin\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2+2(s-\xi)-2(s-h)\right)\right\}$$

$$+\frac{3}{2}m^2\,.\,2\cos\frac{1}{2}J^2\sin\frac{1}{2}J^2\left\{\cos\left(2\chi_2+2(s-h)\right)+\cos\left(2\chi_2-2(s-h)\right)\right\}\Big]$$

Die Ausdrücke (20), (21) und (22) sind nun in die Formel (10) einzusetzen, um den Wasserstand, welcher den durch die Anziehung des Mondes erregten Wellen entspricht, durch eine Reihe von harmonischen Gliedern darzustellen, wobei jedoch für jedes Glied in dem Koëfficienten das zugehörige ι_1 einzusetzen ist, wie dies schon früher erwähnt wurde. Die vorhergehenden Ausdrücke enthalten alle Glieder bis zur Ordnung e^2, da auch me und m^2 als von dieser Ordnung angesehen werden können und die anderen Störungsglieder des Mondlaufes erheblich geringer sind, als die hier berücksichtigten. Uebrigens würde es leicht sein, in die obigen Formeln noch weitere Glieder einzufügen, sollte sich dies in einem einzelnen, ganz abnormen Falle als nothwendig erweisen, was indefs nicht anzunehmen ist. Die gewöhnlich in der Natur vorkommenden Tiden gestatten im Gegentheil eine sehr wesentliche Reduktion der Anzahl der zu berücksichtigenden Glieder.

Wir haben bisher keinerlei Beschränkung bezüglich der trigonometrischen Funktionen der Neigung der Mondbahn gegen den Aequator eingeführt. Dieselbe schwankt zwischen $\omega+i$ und $\omega-i$ oder, da $\omega=23°\;27{,}3'$ und $i=5°\;8{,}8'$ ist, zwischen $28°\;36{,}1'$ und $18°\;18{,}5'$, der Werth von $\sin\frac{1}{2}J^2$ ist daher für das Maximum von $J=0{,}0610$, $\sin\frac{1}{2}J^3=0{,}0151$ und $\sin\frac{1}{2}J^2\cos\frac{1}{2}J^2=0{,}0573$. Wir können daher $\sin\frac{1}{2}J^2$, $\sin\frac{1}{2}J^3$ und ihre Produkte mit Potenzen von $\cos\frac{1}{2}J$ als von der Ordnung e (=0,0549) ansehen, und haben dies bei der Reduktion der Gliederzahl zu berücksichtigen. Die Erfahrung hat gezeigt, dafs die Glieder von der Ordnung e^2 so klein werden, dafs sie im Allgemeinen vernachlässigt werden können, jedoch mufs eine Ausnahme gemacht werden zu Gunsten eines Gliedes mit e^2, das mit einem grofsen numerischen Koëfficienten behaftet ist. Ebenso müssen die Evektions- und Variationsglieder theilweise mitgenommen werden und endlich zwei mit $e\sin\frac{1}{2}J^2$ multiplicirte Glieder, für welche Darwin einen gleich zu erwähnenden besonderen Grund anführt. Durch die Einführung dieser Beschränkungen wird die Zahl der Glieder von 63 auf 24 heruntergebracht, und selbst von diesen brauchen in den meisten Fällen bei weitem nicht alle berücksichtigt zu werden.

Nach Darwin ist es zweckmäfsig, von den mitzunehmenden Gliedern zwei Paare, je eins der eintägigen und der halbtägigen Tiden, zusammenzufassen. Der Grund hierfür ist der, dafs der Zeitraum eines Jahres, welcher bei der praktischen Anwendung der harmonischen Analyse in der Regel zu Grunde gelegt wird, nicht lang genug ist, um eine Tide, deren Argument $\chi_1-(s-\xi)-(p-\xi)$ oder $2\chi_2-(s-\xi)-(p-\xi)$ ist, von einer solchen mit dem Argument $\chi_1-(s-\xi)+(p-\xi)$ oder $2\chi_2-(s-\xi)+(p-\xi)$ zu unterscheiden.[1]) In der That

[1]) Diese Argumente treten in unseren Ausdrücken (21) und (22) nicht unmittelbar hervor, weil wir von Anfang an mit den auf den Frühlingspunkt bezogenen Gröfsen rechnen, während Darwin zunächst alles auf den Intersektionspunkt bezieht und erst später auf den ersteren übergeht.

würden die letzteren, welche bisher niemals abgeleitet wurden, nur eine Unregelmäfsigkeit in den ersteren erzeugen, welche auch thatsächlich bei den englischen Untersuchungen zu Tage getreten, aber bis zu den von Darwin ausgeführten theoretischen Ableitungen unerklärt geblieben ist. Sie machen, wie wir sehen werden, den Eindruck von Tiden, welche die Argumente $\chi_1 - (s-\xi)$ bezw. $2\chi_2 - (s-\xi) - (p-\xi) = 2\chi_2 - 2(s-\xi) + (s-p)$ haben, und müssen daher mit Ausdrücken von diesen Formen verglichen werden. Dies ist der oben erwähnte Grund, die beiden, nach den gemachten Beschränkungen eigentlich auszuschliefsenden Glieder beizubehalten.

Die Glieder, welche hier in Frage kommen, sind folgende:

1. In den eintägigen Tiden:

$$\frac{1}{2}\, e \sin J \cos \frac{1}{2} J^2 \cos\left[\chi_1 - 2(s-\xi) + (s-p) - \frac{1}{2}\pi\right] + \frac{3}{2}\, e \sin J \cos J \cos\left[\chi_1 - (s-p) - \frac{1}{2}\pi\right]$$

Da nun $2(s-\xi) - (s-p) = (s-\xi) + (p-\xi)$ und $(s-p) = (s-\xi) - (p-\xi)$ und $\cos J = \cos \frac{1}{2} J^2 - \sin \frac{1}{2} J^2$, so können wir die beiden Glieder, wenn wir $\sin \frac{1}{2} J^2 \sin J$ vernachlässigen, sehr angenähert schreiben:

$$= \frac{1}{2}\, e \sin J \cos \frac{1}{2} J^2 \left\{ \cos\left[\chi_1 - (s-\xi) - (p-\xi) - \frac{1}{2}\pi\right] + 3 \cos\left[\chi_1 - (s-\xi) + (p-\xi) - \frac{1}{2}\pi\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\, e \sin J \cos \frac{1}{2} J^2 \left\{ 4 \cos\left[\chi_1 - (s-\xi) - \frac{1}{2}\pi\right] \cos(p-\xi) - 2 \sin\left[\chi_1 - (s-\xi) - \frac{1}{2}\pi\right] \sin(p-\xi) \right\}$$

Setzen wir:

$$\operatorname{tg} Q = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(p-\xi)$$

so wird dies

$$= e \sin J \cos \frac{1}{2} J^2 \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 2(p-\xi)}\, \cos\left[\chi_1 - (s-\xi) + Q - \frac{1}{2}\pi\right] \tag{23}$$

und in dieser Form werden wir in Zukunft diese beiden Glieder schreiben.

2. In den halbtägigen Tiden sind es die beiden Glieder:

$$-\frac{1}{2}\, e \cos \frac{1}{2} J^4 \cos\left[2\chi_2 - 2(s-\xi) + (s-p)\right] + \frac{3}{2}\, e \cdot 2 \cos \frac{1}{2} J^2 \sin \frac{1}{2} J^2 \cos\left[2\chi_2 - (s-p)\right]$$

Es ist nun $2\chi_2 - (s-p) = 2\chi_2 - 2(s-\xi) + (s-p) + 2(p-\xi)$, daher der obige Ausdruck:

$$= -\frac{1}{2}\, e \cos \frac{1}{2} J^4 \left\{ \cos\left[2\chi_2 - 2(s-\xi) + (s-p) - 6 \operatorname{tg} \frac{1}{2} J^2 \cos\left[2\chi_2 - 2(s-\xi) + (s-p) + 2(p-\xi)\right] \right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\, e \cos \frac{1}{2} J^4 \left\{ \left[1 - 6 \operatorname{tg} \frac{1}{2} J^2 \cos 2(p-\xi)\right] \cos\left[2\chi_2 - 2(s-\xi) + (s-p)\right] + 6 \operatorname{tg} \frac{1}{2} J^2 \sin 2(p-\xi) \sin\left[2\chi_2 - 2(s-\xi) + (s-p)\right] \right\}$$

Setzen wir:

$$\operatorname{tg} R = \frac{6 \operatorname{tg} \frac{1}{2} J^2 \sin 2(p-\xi)}{1 - 6 \operatorname{tg} \frac{1}{2} J^2 \cos 2(p-\xi)}$$

$$= \frac{6 \sin 2(p-\xi)}{\cot \frac{1}{2} J^2 - 6 \cos 2(p-\xi)}$$

so geht die Summe der beiden Glieder über in:

$$-\frac{1}{2}\, e \cos \frac{1}{2} J^4 \sqrt{1 - 12 \operatorname{tg} \frac{1}{2} J^2 \cos 2(p-\xi)}\, \cos\left[2\chi_2 - 2(s-\xi) + (s-p) - R\right] \tag{24}$$

wobei wir unter dem Wurzelzeichen $36 \operatorname{tg} \frac{1}{2} J^4$ vernachlässigen.

Um den endgültigen Ausdruck für die Höhe des Wasserstandes nach Formel (10) hinschreiben zu können, haben wir noch die den einzelnen Gliedern entsprechenden ι zu bestimmen. Wir beschränken uns dabei auf die nach Einführung der erwähnten Einschränkungen noch übrigbleibenden Glieder, welche

in (20), (21) und (22) durch stärkeren Druck hervorgehoben sind, unter Berücksichtigung der in (23) und (24) gegebenen Zusammenziehung je zweier Glieder.

Beachten wir, dafs die Aenderung der Sternzeit $t+h$ in der Zeiteinheit $=\gamma$, und dafs ν und ξ im Laufe eines Jahres so wenig sich ändern (in maximo etwa $4^1/_2{}^\circ$), dafs dieselben ebenso wie J in diesem Zeitraum als konstant angesehen werden können, so ist die Aenderung von $\chi_1=\gamma$ und von $2\chi_2=2\gamma$, und wir erhalten für die einzelnen Glieder der Reihe nach folgende Aenderungen der Argumente in der Zeiteinheit:

Tiden von langer Periode	Eintägige Tiden	Halbtägige Tiden
$\sigma-\varpi$	$\gamma-2\sigma$	$2\gamma-2\sigma$
$\sigma+\varpi-2\eta$	$\gamma+2\sigma$	2γ
$\sigma-2\eta$	γ	$2\gamma-3\sigma+\varpi$
2σ	$\gamma-3\sigma+\varpi$	$2\gamma-\sigma-\varpi$
$3\sigma-\tilde{\omega}$	$\gamma-\sigma$	$2\gamma-4\sigma+2\varpi$
	$\gamma+\sigma-\varpi$	$2\gamma-3\sigma-\tilde{\omega}+2\eta$
	$\gamma-4\sigma+2\varpi$	$2\gamma-\sigma+\varpi-2\eta$
	$\gamma-3\sigma-\varpi+2\eta$	$2\gamma-4\sigma+2\eta$

Diese Gröfsen sind nun für ι_1 in Formel (10) einzusetzen. Allen gemeinschaftlich ist γ bezw. 2γ, setzen wir daher $\iota_1=\gamma+\iota'$ und entwickeln wir bis auf die erste Potenz von ι', so wird:

$$\frac{k}{a^2\iota_1^2-4gk}=\frac{k}{a^2(\gamma+\iota')^2-4gk}=\frac{k}{a^2\gamma^2-4gk}\left(1-\frac{2\gamma a^2}{a^2\gamma^2-4gk}\,\iota'\right)$$

$$\frac{k}{4a^2\iota_1^2-4gk}=\frac{k}{a^2(2\gamma+2\iota')^2-4gk}=\frac{k}{4a^2\gamma^2-4gk}\left(1-\frac{4a^2\gamma}{4a^2\gamma^2-4gk}\cdot 2\iota'\right)$$

Hiermit gelangen wir nun endlich zu folgenden Ausdrücken für die drei Gattungen von Tiden, deren Summe den theoretischen Ausdruck für die ganze Höhe des Wasserstandes am Beobachtungsorte, soweit er den durch die Anziehung des Mondes erzeugten Wellen entspricht, darstellt. Wir bemerken dazu noch, dafs die negativen Glieder durch Hinzufügung von π zu den Winkeln in positive verwandelt worden sind.

1) Tiden von längerer Periode.

$$(25)\quad K^0{}_m=\frac{3Ma^2}{c^3}\cdot\frac{L_0}{8g}\Big[\Big(1-\frac{3}{2}\sin J^2\Big)\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)+\Big(1-\frac{3}{2}\sin J^2\Big)3e\cos(s-p)+\Big(1-\frac{3}{2}\sin J^2\Big)\frac{45}{8}\cos(s-2h+p)$$
$$+\Big(1-\frac{3}{2}\sin J^2\Big)3m^2\cos 2(s-h)$$
$$+\Big(1-\frac{5}{2}e^2\Big)\frac{3}{2}\sin J^2\cos 2(s-\xi)+\frac{3}{2}\sin J^2\cdot\frac{7}{2}e\cos\Big(2(s-\xi)+(s-p)\Big)\Big]$$

2) Tiden von eintägiger Periode.

$$(26)\quad K'_m=\frac{3Ma^2}{c^3}L_1\frac{k}{a^2\gamma^2-4gk}\Big[\Big(1-\frac{5}{2}e^2\Big)\Big(1+\frac{4a^2\gamma\sigma}{a^2\gamma^2-4gk}\Big)\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2(s-\xi)+\frac{1}{2}\pi\Big)$$
$$+\Big(1-\frac{5}{2}e^2\Big)\Big(1-\frac{4a^2\gamma\sigma}{a^2\gamma^2-4gk}\Big)\sin J\sin\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1+2(s-\xi)-\frac{1}{2}\pi\Big)$$
$$+\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)\sin J\cos J\cos\Big(\chi_1-\frac{1}{2}\pi\Big)$$
$$+\frac{7}{2}e\Big(1+\frac{2a^2\gamma(3\sigma-\varpi)}{a^2\gamma^2-4gk}\Big)\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2(s-\xi)-(s-p)+\frac{1}{2}\pi\Big)$$
$$+e\Big(1+\frac{2a^2\gamma\sigma}{a^2\gamma^2-4gk}\Big)\sqrt{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos 2(p-\xi)}\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-(s-\xi)+Q-\frac{1}{2}\pi\Big)$$
$$+\frac{3}{2}e\Big(1-\frac{2a^2\gamma(\sigma-\varpi)}{a^2\gamma^2-4gk}\Big)\sin J\cos J\cos\Big(\chi_1+(s-p)-\frac{1}{2}\pi\Big)$$
$$+\frac{17}{2}e^2\Big(1+\frac{2a^2\gamma(4\sigma-2\varpi)}{a^2\gamma^2-4gk}\Big)\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2(s-\xi)-2(s-p)+\frac{1}{2}\pi\Big)$$
$$+\frac{105}{16}me\Big(1+\frac{2a^2\gamma(3\sigma+\varpi-2\eta)}{a^2\gamma^2-4gk}\Big)\sin J\cos\frac{1}{2}J^2\cos\Big(\chi_1-2(s-\xi)-(s-2h+p)+\frac{1}{2}\pi\Big)\Big]$$

3) Tiden von halbtägiger Periode.

$$(27)\quad K''_m = \frac{3Ma^2}{c^3} L_2 \frac{k}{4a^2\gamma^2-4gk}\Bigg[\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\left(1+\frac{8a^2\gamma\sigma}{4a^2\gamma^2-4gk}\right)\cos\frac{1}{2}J^4\cos(2\chi_2-2(s-\xi)$$
$$+\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\frac{1}{2}\sin J^2\cos 2\chi_2$$
$$+\frac{7}{2}e\left(1+\frac{4a^2\gamma(3\sigma-\varpi)}{4a^2\gamma^2-4gk}\right)\cos\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2-2(s-\xi)-(s-p)\right)$$
$$+\frac{1}{2}e\left(1+\frac{4a^2\gamma(\sigma+\varpi)}{4a^2\gamma^2-4gk}\right)\sqrt{1-12\operatorname{tg}\frac{1}{2}J^2\cos 2(p-\xi)}\cos\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2-2(s-\xi)+(s-p)-R+\pi\right)$$
$$+\frac{17}{2}e^2\left(1+\frac{4a^2\gamma(4\sigma-2\varpi)}{4a^2\gamma^2-4gk}\right)\cos\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2-2(s-\xi)-2(s-p)\right)$$
$$+\frac{105}{16}me\left(1+\frac{4a^2\gamma(3\sigma+\varpi-2\eta)}{4a^2\gamma^2-4gk}\right)\cos\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2-2(s-\xi)-(s-2h+p)\right)$$
$$+\frac{15}{16}me\left(1+\frac{4a^2\gamma(\sigma-\varpi+2\eta)}{4a^2\gamma^2-4gk}\right)\cos\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2-2(s-\xi)+(s-2h+p)+\pi\right)$$
$$+\frac{23}{8}m^2\left(1+\frac{4a^2\gamma(4\sigma-2\eta)}{4a^2\gamma^2-4gk}\right)\cos\frac{1}{2}J^4\cos\left(2\chi_2-2(s-\xi)-2(s-h)\right)\Bigg]$$

wobei wir uns zu erinnern haben, dafs

$$\chi_1 = t+h-\nu-\psi_1 \text{ und } 2\chi_2 = 2(t+h-\nu)-\psi_2 \text{ ist.}$$

Aufser dem Monde wirkt nun aber auch noch die Sonne anziehend auf das Wasser in dem Kanal, und es werden dadurch ebenfalls Wellen erregt. Wir können nun nach Analogie mit den Mondtiden ohne Weiteres die Ausdrücke für die Sonnentiden hinschreiben, indem wir in den Formeln (25), (26), (27) $s=h$, $p=p_1$, $\xi=\nu=0$, $\sigma=\eta$, $\varpi=0$, $J=\omega$, $e=e$, $M=S$ und $c=c_1$ setzen. Da aber die Erdbahn eine viel geringere Excentricität besitzt als die Mondbahn, so können die elliptischen Tiden, mit Ausnahme der gröfseren halbtägigen, vernachlässigt werden, auch fallen selbstverständlich die Evections- und Variationstiden fort. Um uns ganz der Darwinschen Bezeichnung anzuschliefsen, setzen wir:

$$\frac{3Sa^2}{c_1^3} = \frac{\tau_1}{\tau}\cdot\frac{3Ma^2}{c^3}$$

oder:

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{Sc^3}{Mc_1^3} = 0{,}46035 = \frac{1}{2{,}17226}$$

Dann erhalten wir für die Sonnentiden die Ausdrücke:

1) Tiden von längerer Periode.

$$(28)\quad K^0_s = \frac{3Ma^2}{c^3}\frac{L_0}{8g}\frac{\tau_1}{\tau}\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\frac{3}{2}\sin\omega^2\cos 2h$$

2) Tiden von eintägiger Periode.

$$(29)\quad K'_s = \frac{3Ma^2}{c^3}L_1\frac{k}{a^2\gamma^2-4gk}\Bigg[\frac{\tau_1}{\tau}\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\left(1+\frac{4a^2\gamma\eta}{a^2\gamma^2-4gk}\right)\sin\omega\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\left(t-h+\frac{1}{2}\pi-\psi_1\right)$$
$$+\frac{\tau_1}{\tau}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)\sin\omega\cos\omega\cos\left(t+h-\frac{1}{2}\pi-\psi_1\right)\Bigg]$$

3) Tiden von halbtägiger Periode.

$$(30)\quad K''_s = \frac{3Ma^2}{c^3}L_2\frac{k}{4a^2\gamma^2-4gk}\Bigg[\frac{\tau_1}{\tau}\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\left(1+\frac{8a^2\gamma\eta}{4a^2\gamma^2-4gk}\right)\cos\frac{1}{2}\omega^4\cos(2t-\psi_2)$$
$$+\frac{\tau_1}{\tau}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)\frac{1}{2}\sin\omega^2\cos\left(2(t+h)-\psi_2\right)$$
$$+\frac{7}{2}e_1\frac{\tau_1}{\tau}\left(1+\frac{12a^2\gamma\eta}{4a^2\gamma^2-4gk}\right)\cos\frac{1}{2}\omega^4\cos\left(2t-(h-p_1)-\psi_2\right)\Bigg]$$

Der Gesammt-Wasserstand über dem mittleren Niveau ist dann = der Summe der Ausdrücke (25) bis (30). Zählen wir die Wasserstände von einer Marke, welche A_0 Meter unterhalb des mittleren Niveaus liegt, so ist die Höhe des Wassers in einem gegebenen Augenblicke:

$$h = A_0 + K^0m + K'm + K''m + K^0s + K's + K''s$$

Vergleichen wir die obigen Ausdrücke mit den von Darwin nach der Gleichgewichtstheorie abgeleiteten, so fällt als charakteristischer Unterschied sofort in die Augen, dafs nach der Wellentheorie (wie übrigens auch nach der Laplace'schen Theorie) die Höhe der Welle der Wassertiefe proportional ist, und dafs aufserdem noch jedes Glied mit einem Faktor multiplicirt ist, welcher von der Aenderung des Winkels der in ihm vorkommenden trigonometrischen Funktion und der Wassertiefe abhängig ist. Diese Abhängigkeit der Koëfficienten von der Eigenbewegung der Himmelskörper ist von grofser Wichtigkeit, weil sie erklärt, weshalb man bei den Versuchen, die Masse des Mondes aus Gezeitenbeobachtungen abzuleiten, bei Anwendung der Gleichgewichtstheorie nothwendig eine zu grofse Masse finden mufs. Wenn die Tiefe des Wassers nahe 6000 m ist, so wird die Masse des Mondes nach der Gleichgewichtstheorie um nahe $^1/_{10}$ zu grofs gefunden werden.[1]) Dafs auch die Lokalfaktoren andere sind, ist selbstverständlich. Es folgt hieraus, dafs auf sehr seichten Gewässern nur Tiden von sehr geringer Höhe entstehen können, wie dies ja auch von der Ostsee, dem Mittelmeer und dem Michigan-See bekannt ist. Namentlich der letztere, welcher von jedem Verdachte einer Kommunikation mit dem Oceane, durch welche die Gezeiten in den See hinein fortgepflanzt werden könnten, frei ist, bietet ein Beispiel dafür, dafs jedes Gewässer den flutherzeugenden Kräften von Mond und Sonne unterworfen ist, und dafs die resultirenden Wellen auch durch die Beobachtung nachgewiesen werden können.

Um die Ausdrücke für die durch die Anziehung von Mond und Sonne hervorgerufenen Wellen zu einem Abschlusse zu bringen, erübrigt es noch, die Reibung zu berücksichtigen. Es wird genügen, dies durch eine allgemeine Betrachtung zu thun, ohne dieselbe für jedes einzelne Glied besonders durchzuführen.

Nach Tides and waves Art. (325) entspricht einer störenden Kraft von der Form:

$$H \sin(\iota t + m x) + H_1 \sin(\iota t - m x)$$

unter Berücksichtigung der Reibung, die Wassererhebung:

$$K = \frac{km}{(\iota^2 - gkm^2)^2 + f^2\iota^2}\left[(\iota^2 - gkm^2)\left\{H\cos(\iota t + mx) - H_1\cos(\iota t - mx)\right\} - f\iota\left\{H\sin(\iota t + mx) - H_1\sin(\iota t - mx)\right\}\right]$$

wenn der Reibungskoëfficient mit f bezeichnet und vorausgesetzt wird, dafs die Reibung der ersten Potenz der Geschwindigkeit der Wassertheilchen bei ihrer Wellenbewegung proportional ist. Werden die in H und H_1 enthaltenen Lokalfaktoren wie früher mit A und B bezeichnet, und führen wir wieder die Werthe $m = \frac{2}{a}$, $mx = 2\varphi$ ein, so können wir den Ausdruck für die Wassererhebung schreiben:

$$K = \frac{3Ma}{r^3} F(\delta) \frac{2ka^3}{(\iota^2a^2 - 4gk)^2 + f^2a^4\iota^2} L \left\{\frac{\iota^2a^2 - 4gk}{a^2}\cos(\iota t - \psi) - f\iota \,.\, \sin(\iota t - \psi)\right\}$$

worin wie früher $L = \sqrt{(A+B)^2\cos 2\varphi^2 + (A-B)^2\sin 2\varphi^2}$, $tg\psi = -\frac{A-B}{A+B}tg2\varphi$ ist und wo $F(\delta) = \left(\frac{3}{2}\cos\delta^2 - 1\right) = \sin 2\delta$ oder $= \cos\delta^2$ und $\iota = 0 = \iota$, oder $= 2\iota$, gesetzt werden mufs, je nachdem es sich um Tiden von langer, eintägiger oder halbtägiger Periode handelt.

Setzen wir nun:

$$\frac{\iota^2a^2 - 4gk}{a^2} = R\cos\varrho \text{ und } f\iota = R\sin\varrho,$$

so ist:

$$tg\varrho = \frac{fa^2\iota}{\iota^2a^2 - 4gk} \text{ und } R = \frac{1}{a^2}\sqrt{(\iota^2a^2 - 4gk)^2 + f^2a^4\iota^2}$$

und:

$$K = \frac{3Ma}{r^3} F(\delta) \frac{2ka}{\sqrt{(\iota^2a^2 - 4gk)^2 + f^2a^4\iota^2}} L\cos(\iota t - \psi + \varrho)$$

---

[1]) Tides and waves Art. (455).

Wird noch $\iota = \iota_0 + \iota'$ gesetzt, wo für die eintägigen bezw. halbtägigen Tiden $\iota_0 = \gamma$ oder $= 2\gamma$ ist, so erhält man leicht:

$$(31) \quad K = \frac{3Ma^2}{r^3} F(\delta) \frac{2k}{\sqrt{(\iota_0^2 a^2 - 4gk)^2 + f^2 a^4 \iota_0^2}} \left(1 - \frac{2a^2\iota_0}{\iota_0^2 a^2 - 4gk} \iota'\right) L \cos(\iota t - \psi + \varrho)$$

indem wir uns erlauben, innerhalb der Klammer das Quadrat des Reibungscoefficienten f zu vernachlässigen.[1])

Setzen wir $\psi - \varrho = \varkappa$, so wird $\iota t - (\psi - \varrho) = \iota t - \varkappa = \iota\left(t - \frac{\varkappa}{\iota}\right)$, d. h. wenn wir die Höhe einer Tide für die Zeit t berechnen wollen, so dürfen wir nicht die Zeit t selbst anwenden, sondern eine Zeit, welche um $\frac{\varkappa}{\iota}$ kleiner ist, $\frac{\varkappa}{\iota}$ giebt also die „Verspätung der Tide", welche aus der Lage des Kanals und Beobachtungsorts (Vertheilung von Land und Wasser) und der Reibung entspringt.

Wir haben bisher den in den Formeln vorkommenden Winkel, soweit er astronomischen Ursprungs ist $= \iota t$ gesetzt, wozu wir berechtigt sind, sobald der Anfang von t entsprechend bestimmt ist; da aber die Argumente sehr verschiedene sind, so involvirt dies, dafs der Anfangstermin von t für jedes Argument ein verschiedener sein mufs. Bei der praktischen Anwendung müssen wir aber von einem bestimmten, für alle Tiden gleichen Anfangstermine ausgehen, als welchen wir den Mittag des ersten Tages des Zeitraums, für welchen wir die Beobachtungen bearbeiten, annehmen wollen. Für diese Epoche sei nun der astronomische Theil des Winkels $= V_0 + u$, dann ist das Argument zu irgend einer andern um t von der Anfangsepoche entfernten Zeit $= V_0 + u - \varkappa + \iota t$.

V_0 enthält die Werthe von t_0, h_0, s_0 und p_0 für die Anfangsepoche, während u die in dem Argumente vorkommenden Werthe von ν und ξ umfafst. Diese letzteren sind nun zwar auch etwas veränderlich, da aber die Veränderlichkeit nicht sehr bedeutend ist (in maximo $4^0\,40'$ resp. $4^0\,20'$ pro Jahr) so erscheint es zulässig, dieselben als Konstante zu behandeln, wobei es aber zweckmäfsig ist, ihren Werth so zu wählen, dafs man den geringst möglichen Fehler begeht. Dies ist der Fall, wenn wir u als denjenigen Werth der Funktion von ν und ξ definiren, welcher genau für die Mitte des Zeitraums gilt, für welchen die Beobachtungen bearbeitet werden.

Für die Sonnentiden ist selbstverständlich $u = 0$.

§ 3.

Tiden, welche von der vierten Potenz der Entfernung des Mondes abhängen.

Nach Gl. (2) sind die Glieder des Ausdrucks für die flutherzeugende Kraft, welche von der vierten Potenz der Entfernung des Mondes abhängen, folgende:

$$(32) \quad -\frac{3Ma}{r^3} \sin\beta \sin\eta \left\{\frac{5}{2} \frac{a}{r} \sin\beta^2 \cos\eta^2 - \frac{1}{2} \frac{a}{r}\right\}$$

---

[1]) Der vollständige Ausdruck innerhalb der Klammer unter Beschränkung auf die erste Potenz von ι' würde sein:

$$1 - \frac{2a^2\iota_0(\iota_0^2 a^2 - 4gk) + f^2 a^4 \iota_0}{(\iota_0^2 a^2 - 4gk)^2 + f^2 a^4 \iota_0^2} \iota'$$

Wird $\iota_0^2 a^2 - 4gk = 0$, was der Fall ist, wenn $k = \frac{\iota_0^2 a^2}{4g}$ oder für $\iota_0 = \gamma$, wenn $k = ca\ 5500\,m$ ist, so geht K über in:

$$K = \frac{3Ma^2}{r^3} F(\delta) \frac{2k}{fa^2\iota_0} \left(1 - \frac{\iota'}{\iota_0}\right) L \cos\left(\iota t - \psi + \frac{1}{2}\pi\right)$$

was sehr grofs, aber niemals wie Formel (7) unendlich werden kann.

Wenn wir hierin die Ausdrücke für $\sin\beta\sin\eta$ und $\sin\beta\cos\eta$ aus Gl. (4) und (5) einsetzen, so sieht man leicht, dafs eine Anzahl Glieder entstehen wird, welche dieselben Winkelgröfsen enthalten wie die in dem Ausdruck (6) gefundenen und die sich mit diesen vereinigen. Dieselben sind aber sehr viel kleiner als diese, da sie, abgesehen von anderen Umständen, mit dem Faktor $\frac{a}{r}$ multiplicirt sind, welcher nahe $= \frac{1}{60}$ ist, und es würde nicht der Mühe lohnen, sie abzuleiten, da sie erstere nur in ganz unerheblicher Weise beeinflussen würden. Wir können uns darauf beschränken, etwa neu auftretende Glieder aufzusuchen. Auf diese Weise können wir sofort das Glied $\frac{3Ma^2}{2r^4}\sin\beta\sin\eta$ beseitigen, welches, wie Gl. (4) zeigt, nur Tiden von langer Periode und eintägige Tiden erzeugen würde.

Das erste Glied von (32)

$$-\frac{3Ma}{r^3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{a}{r}\sin\beta\sin\eta\,.\,\sin\beta^2\cos\eta^2$$

entsteht durch Multiplikation von (6) mit $\frac{5}{2}\frac{a}{r}\sin\beta\cos\eta$. Auch hier sehen wir unter Bezugnahme auf (5), dafs nur die Multiplikation der beiden letzten Glieder von (6) (der halbtägigen Tiden) mit den beiden letzten Gliedern von (5) neue, und zwar von 3Θ abhängige Glieder hervorbringen werde.

Führen wir die Multiplikation aus, so erhalten wir nach leichten Umformungen unter vorläufiger Weglassung des Faktors

$$\frac{3Ma}{r^3}\cdot\frac{5}{2}\frac{a}{r},$$

da $\cos\delta(\cos\varepsilon\cos\varphi\cos\Theta+\sin\varphi\sin\Theta)=\cos\delta\left(\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos(\Theta-\varphi)-\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos(\Theta+\varphi)\right)$

ist, für das Theilprodukt von (5) und (6) den Ausdruck:

$$\cos\delta^3\Big\{-\frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\varepsilon^4\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2\Big(\sin(3\Theta+\varphi)+\sin(\Theta+3\varphi)\Big)+\frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\varepsilon^6\Big(\sin(3\Theta+3\varphi)+\sin(\Theta+\varphi)\Big)$$
$$-\frac{1}{4}\cos\frac{1}{2}\varepsilon^4\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\Big(\sin(3\Theta-\varphi)+\sin(\Theta-3\varphi)\Big)+\frac{1}{4}\cos\frac{1}{2}\varepsilon^6\Big(\sin(3\Theta-3\varphi)+\sin(\Theta-\varphi)\Big)\Big\}$$

Die Glieder mit einfachem Θ, welche eine eintägige Tide liefern würden, können wir wiederum fortlassen und behalten demnach als von der vierten Potenz der Entfernung abhängige flutherzeugende Kraft:

$$(33)\qquad \frac{3Ma}{r^3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{a}{r}\cos\delta^3\Big\{-\frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\varepsilon^4\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin(3\Theta+\varphi)-\frac{1}{4}\cos\frac{1}{2}\varepsilon^4\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin(3\Theta-\varphi)$$
$$+\frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\varepsilon^6\sin(3\Theta+3\varphi)+\frac{1}{4}\cos\frac{1}{2}\varepsilon^6\sin(3\Theta+3\varphi)\Big\}$$

Wird hierauf Gl. (8) angewendet, so sieht man, dafs vier verschiedene Wellen entstehen, welche alle eine Periode von einem drittel Tage haben, die sich aber in eine Welle zusammenfassen lassen. Wir wollen diese einfache Entwickelung nicht weiter ausführen, sondern schliefsen, dafs eine Welle entsteht von der Form:

$$(34)\qquad \frac{3Ma^2}{r^3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{a}{r}\cdot\frac{k}{9a^2\iota_2^2-4gk}L_3\cos\delta^3\cos(3\Theta-\psi_3)$$

Die geringe Gröfse dieser Tide erlaubt uns, den Mondlauf als in einer kreisförmigen Bahn vor sich gehend anzunehmen, wir setzen also: $r=c$ und $l=s-\xi$.

Da $\Theta = t + h - \nu - (\alpha - \nu)$, so ist $3\Theta - \psi_3 = 3\chi_3 - 3(\alpha - \nu)$, wenn wir $3(t + h - \nu) - \psi_3 = 3\chi_3$ setzen, und

$$\cos(3\Theta - \psi_3) = \cos 3\chi_3 \cos 3(\alpha - \nu) + \sin 3\chi_3 \sin 3(\alpha - \nu).$$

Es ist nun unter Bezugnahme auf (11):

$$\cos 3(\alpha - \nu) = 4\cos(\alpha - \nu)^3 - 3\cos(\alpha - \nu) = \frac{1}{\cos\delta^3}(4\cos l^3 - 3\cos\delta^2\cos l)$$
$$= \frac{1}{\cos\delta^3}(\cos 3l + 3\sin\delta^2\cos l) = \frac{1}{\cos\delta^3}(\cos 3l + 3\sin J^2\sin l^2\cos l)$$
$$= \frac{1}{\cos\delta^3}\left\{\frac{1}{4}(1 + 3\cos J^2)\cos 3l + \frac{3}{4}\sin J^2\cos l\right\}$$

Da wir die Excentricität e vernachlässigt haben, so können wir auch die Gröfse gleicher Ordnung $\sin\frac{1}{2}J^2$ und ihre Potenzen und Produkte mit Potenzen von $\cos\frac{1}{2}J$ vernachlässigen; daher fällt das zweite Glied dieses Ausdrucks weg. Wir erhalten für den Faktor des ersten Gliedes:

$$1 + 3\cos J^2 = 1 + \cos J^2 + 2\cos J^2$$
$$= 2\left(\cos\frac{1}{2}J^4 + \sin\frac{1}{2}J^4\right) + 2\left(\cos\frac{1}{2}J^2 - \sin\frac{1}{2}J^2\right)^2$$
$$= 4\left(\cos\frac{1}{2}J^4 + \sin\frac{1}{2}J^4\right) - 4\cos\frac{1}{2}J^2\sin\frac{1}{2}J^2$$

Wird dies mit

$$1 = \cos\frac{1}{2}J^2 + \sin\frac{1}{2}J^2$$

multiplicirt, so wird

$$1 + 3\cos J^2 = 4\left(\cos\frac{1}{2}J^6 + \sin\frac{1}{2}J^6\right),$$

wovon wir noch $\sin\frac{1}{2}J^6$ weglassen können, daher:

$$\cos 3(\alpha - \nu) = \frac{1}{\cos\delta^3}\cos\frac{1}{2}J^6\cos 3l$$

In gleicher Weise finden wir:

$$\sin 3(\alpha - \nu) = \sin(\alpha - \nu)\left(4\cos(\alpha - \nu)^2 - 1\right)$$
$$= \frac{1}{\cos\delta^3}\left\{\frac{1}{4}\cos J(3 + \cos J^2)\sin 3l + \frac{3}{4}\cos J\sin J^2\sin l\right\},$$

wo wieder das mit $\sin J^2$ multiplicirte Glied wegfallen kann. Ferner:

$$\cos J(3 + \cos J^2) = 3\cos J + \cos J^3$$
$$= 4\left(\cos\frac{1}{2}J^6 - \sin\frac{1}{2}J^6\right),$$

woraus:

$$\sin 3(\alpha - \nu) = \frac{1}{\cos\delta^3}\cos\frac{1}{2}J^6\sin 3l$$

und endlich:

$$\cos(3\Theta - \psi_3) = \frac{1}{\cos\delta^3}\cos\frac{1}{2}J^6\cos\left(3\chi_3 - 3(s - \xi)\right)$$

Setzen wir dies in (34) ein, so ergiebt sich für die von der vierten Potenz der Entfernung des Mondes abhängige Tide der Ausdruck:

$$(35)\qquad \frac{3Ma^2}{c^3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{k}{9a^2\iota^2 - 4gk}L_3\cos\frac{1}{2}J^6\cos\left(3\chi_3 - 3(s - \xi)\right)$$

Obwohl diese Tide nur sehr geringe Bedeutung hat, so macht ihre Ableitung so wenig Mühe, dafs sie immer mit berechnet werden sollte. Für die Sonne ist die entsprechende Tide natürlich noch geringfügiger, sie kann aber unter Umständen durch meteorologische Einflüsse von Bedeutung werden und sollte daher auch für die Sonne ermittelt werden.

§ 4.

Kurze Bezeichnung der verschiedenen Tiden. Gezwungene und freie Wellen, Einfluſs der äuſseren Gestaltung des Kanals, Neben-, zusammengesetzte und meteorologische Tiden.

Um eine bestimmte Tide kurz und unzweideutig bezeichnen zu können, wurden von Sir William Thomson und Mr. Roberts Buchstaben gewählt, welche zum Theil an den Ursprung der Tide erinnern. So wurden die Haupt-Mond- und Sonnentiden mit M und S bezeichnet und durch einen Index die Periode der Tide, ob es eine ein- oder halbtägige Tide ist u. s. w., unterschieden. Für die andern Tiden ist die Bezeichnung meistens willkürlich gewählt. Nach der Reihenfolge der Glieder in den Ausdrücken (25) bis (30) sind die Bezeichnungen folgende, wobei wir noch bemerken wollen, dafs wir der Vergleichbarkeit der Resultate wegen die von Darwin in seiner Abhandlung gegebenen adoptirt haben.

A. Mondtiden:

1. Tiden von langer Periode (25) —, Mm, —, Msf, Mf, —.
2. Tiden von eintägiger Periode (26) O, OO, K_1, Q, M_1, J, —, —.
3. Tiden von halbtägiger Periode (27) M_2, K_2, N, L, 2N, ν, λ, μ.
4. Tiden von dritteltägiger Periode (35) M_3.

B. Sonnentiden:

1. Tiden von langer Periode (28) Ssa.
2. Tiden von eintägiger Periode (29) P, K_1.
3. Tiden von halbtägiger Periode (30) S_2, K_2, T.
4. Tiden von dritteltägiger Periode (35) S_3.

In der später folgenden Uebersichtstabelle über sämmtliche Tiden sind diese Bezeichnungen neben jede Tide gesetzt, so dafs die Zugehörigkeit derselben aufser Zweifel gesetzt wird.

Die Wellen, welche wir bisher behandelt haben, und für deren Höhe wir im Vorhergehenden die Ausdrücke abgeleitet haben, gehören zu der Klasse der gezwungenen Wellen,[1]) welche auch wohl primäre Wellen genannt werden. Dieselben sind ihrer Existenz nach einzig und allein von der Existenz der störenden Kraft abhängig; sie würden augenblicklich aufhören, zu bestehen, sobald die störende Kraft aufhörte, zu wirken; ihr höchster oder niedrigster Punkt befindet sich immer in einer ganz bestimmten Entfernung von dem Punkte des Kanals, wo die störende Kraft in einem gegebenen Augenblicke $= 0$ ist, daher ist ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit in keiner Weise von der Tiefe des Wassers abhängig, ebensowenig wie ihre Länge, welche stets der halben Länge des Kanals gleich ist.

Es werden aber andere Wellen existiren als Folge des vorherigen Bestehens der störenden Kraft (im Falle diese aufhörte, zu wirken), und es werden immer Wellen vorhanden sein, die gleichzeitig mit und neben den gezwungenen Wellen auftreten, zu diesen in bestimmter Beziehung stehen, aber von der Tiefe des Kanals und anderen Umständen seiner Gestaltung abhängen. Diese Wellen werden freie Wellen, auch wohl sekundäre Wellen genannt.

Die erste Klasse der freien Wellen, welche als Folge plötzlichen Aufhörens oder plötzlicher Aenderung der störenden Kraft auftreten würden, kann unberücksichtigt bleiben, da eine solche Eventualität aufserhalb des Bereichs der Wahrscheinlichkeit liegt und aufserdem mit solchen Katastrophen verbunden

[1]) „Tides and waves“, Art. (278).

sein würde, dafs wohl Niemand übrig bleiben würde, um die Wirkung zu beobachten. Wir halten uns daher nur an die zweite Klasse von freien Gezeitenwellen, welche gleichzeitig mit den gezwungenen Wellen und neben diesen auftreten, da es, im Wesentlichen jedenfalls, nur diese sind, welche an unseren Küsten zur Erscheinung und Beobachtung gelangen.

Sie charakterisiren sich dadurch, dafs ihr Koëfficient dem der gezwungenen Welle proportional, und dafs ihre Periode der der gezwungenen Welle gleich, ihre Länge aber verschieden ist. Hat die gezwungene Welle die Form $A \cos(\iota t - mx)$, so hat die daneben auftretende freie Gezeitenwelle die Form $C \cos(\iota t - m'x + \alpha)$. Hierin ist C dem A proportional, α ist abhängig von den Umständen des Falles und $m' = \frac{2\pi}{\lambda'}$ (λ' = Länge der freien Welle) hängt mit $\iota = \frac{2\pi}{\tau}$ (τ = Periode der freien sowie der gewungenen Welle) zusammen durch die Gleichung:

$$\iota^2 = gm' \frac{\varepsilon^{m'k} - \varepsilon^{-m'k}}{\varepsilon^{m'k} + \varepsilon^{-m'k}}$$

(ε = Exponential-Koëff. = 2,718...)

oder:

$$\tau^2 = \frac{2\pi\lambda'}{g} \frac{\varepsilon^{\frac{4\pi k}{\lambda'}} + 1}{\varepsilon^{\frac{4\pi k}{\lambda'}} - 1} \tag{36}$$

Ist λ' im Vergleich zu k sehr grofs, was bei der Fluthwelle, allen im Ocean vorkommenden Tiefen gegenüber, der Fall ist, so wird:

$$\varepsilon^{\frac{4\pi k}{\lambda'}} + 1 = 2 \text{ und } \varepsilon^{\frac{4\pi k}{\lambda'}} - 1 = \frac{4\pi k}{\lambda'} \text{ also:}$$

$$\tau^2 = \frac{\lambda'^2}{gk}$$

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle:

$$v = \frac{\lambda'}{\tau} = \sqrt{gk}\ ^{1}) \tag{37}$$

sowie:

$$m' = \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{2\pi}{\tau\sqrt{gk}} = \frac{\iota}{\sqrt{gk}} \tag{38}$$

Sind von beiden Klassen von Wellen, gezwungenen und freien, mehrere gleichzeitig vorhanden, so addiren sich dieselben einfach.

Es läfst sich nun nicht allgemein angeben, in welchem Verhältnisse A und C zu einander stehen, und welchen Werth α hat, da dies von den Umständen des besonderen Falles abhängt. Wie komplicirt aber auch der Ausdruck für die Wassererhebung in einem gegebenen Falle sein möge, so wird er sich immer auf die Form:

$$A \sqrt{P^2 + Q^2} \cos(\iota t - B)$$

---

[1]) Dies ist, wie beiläufig bemerkt werden möge, die Formel, welche mehrfach benutzt worden ist, um aus der beobachteten Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Erdbebenwellen (für welche sich leider die fälschliche Bezeichnung Fluthwellen einzubürgern droht) die mittlere Tiefe der Oceane zu berechnen, da $k = \frac{v^2}{g}$. Es wird nun häufig (so von Geinitz in Petermann's Mittheilungen 1877, S. 454 ff.) zwischen einer Airy'schen und einer Russell'schen Formel unterschieden, von denen die erstere $k = \left(\frac{v}{5{,}671}\right)^2$, die letztere, wie oben angeführt, $k = \frac{v^2}{g}$ lauten soll. Der Unterschied ist nur ein scheinbarer, da die Zahl 5,671 nichts Anderes ist als $\sqrt{32{,}1603} = \sqrt{g}$, da der ältere Werth von g zu 32,1603 engl. Fuss angenommen wurde. Es ist dem Verf. unbekannt, woher die sogen. Airy'sche Formel entnommen worden ist, jedenfalls nicht aus „Tides and waves", wo eben die oben im Text angeführten Ausdrücke abgeleitet sind. Die Formel $k = \frac{v^2}{g}$ würde demnach richtiger nach Airy als nach Russell benannt werden.

bringen lassen, wo $\operatorname{tg} B = \frac{P}{Q}$ und P und Q Funktionen von k, m und m' sind. Hieraus geht hervor, dafs wir auch die freien Gezeitenwellen, welche wir der Beobachtung unterwerfen, nach denselben Ausdrücken behandeln können, welche wir oben für die gezwungenen Wellen gefunden haben, indem wir nur solche Koëfficienten hinzufügen, wie sie der gegebene Fall verlangt, und beachten, dafs $\varkappa$ einen andern, gleichfalls von den Umständen des Falles abhängigen Werth erhält. Es wird dann eine interessante Aufgabe sein, zu untersuchen, in wie weit die Ergebnisse der theoretischen Untersuchung, von denen die Art. (290) bis (346) der „Tides and waves" eine reiche Fülle bieten, mit den Resultaten der Beobachtung übereinstimmen. Wir müssen uns hier darauf beschränken, auf diese wichtigen und interessanten Untersuchungen hinzuweisen.

Da wir die Beobachtungen der Gezeiten an den Küsten vornehmen, wo die Tiefe des Wassers in der Regel nicht sehr bedeutend ist, so kann und wird sehr häufig, wenn nicht regelmäfsig, der Fall eintreten, dafs $C = A\sqrt{P^2 + Q^2}$ einen so grofsen Werth erlangt, dafs es einen ziemlich grofsen Bruchtheil der mittleren Wassertiefe ausmacht. In diesem Falle treten Erscheinungen auf, welche eine speciellere Erwähnung erfordern.

Erstens wird die Gestalt der Welle eine andere. Während bei der einfachen Oscillation die Welle ganz symmetrisch ist, so wird sie, sobald ihre Maximalhöhe über dem mittleren Niveau zu der mittleren Tiefe des Wassers ein grofses Verhältnifs hat, an der Vorderseite steiler, an der Rückseite flacher, d. h. das Wasser braucht weniger Zeit zum Steigen als zum Fallen. Wird die Fluth in einem Flusse beobachtet, und ist das Verhältnifs ihrer Höhe zur Tiefe ein sehr grofses, so tritt in gewisser Entfernung von der Mündung die Erscheinung mehrerer Hochwasser auf, und als extremer Fall, wenn die Umstände sonst dafür günstig sind, kann eine „Bore" oder „Fluthbrandung" entstehen, d. h. das Wasser stürzt sich bei seinem plötzlichen Steigen brandend über die den eigentlichen Flufs begrenzenden flachen Sände, während in dem tieferen Wasser die Fluthwelle in sichtbarer Erhebung, aber ohne zu branden,[1]) den Flufs hinaufrückt.

Bis jetzt ist nur versucht worden, diese Erscheinungen durch successive Näherungen in einer Reihenentwickelung darzustellen, wobei natürlich extreme Fälle, in denen, wie bei der Fluthbrandung, das Gesetz der Stetigkeit aufhört, ausgeschlossen sind. Die Untersuchungen von Airy („Tides and waves", Art. 192 bis 216 sowie 309) zeigen, dafs man die Höhe der durch den Umstand, dafs die aus See an die Küste tretende Welle eine im Vergleich zur Wassertiefe hohe ist, beeinflufsten Welle durch einen Ausdruck von der Form:

$$(39) \qquad C\alpha \cos(\iota t - B + \beta) + \frac{C^2}{k}\alpha' \cos(2\iota t - 2B + \beta') + \frac{C^3}{k^2}\alpha'' \cos(3\iota t - 3B + \beta'') + \ldots$$

darstellen kann. Das erste Glied ist die aus See kommende Welle, welche mit einem Faktor α multiplicirt erscheint, welcher von höheren Potenzen der Gröfse $\frac{C}{k}$ und von m'x abhängt und immer sehr nahe $= 1$ ist, wie auch der Winkel β immer nahe $= 0$ sein wird; α', $\alpha'' \ldots$ β', $\beta'' \ldots$ sind Funktionen von $\frac{C}{k}$ und m'x, welche sehr verschiedene und unter Umständen recht grofse Werthe haben können.

Wir sehen, dafs die Koëfficienten der einzelnen Glieder Potenzen des Verhältnisses des Koëfficienten des Hauptgliedes zur Tiefe als Faktoren enthalten, ohne dafs wir im Allgemeinen im Stande sein werden, ihr Verhältnifs zu dem Hauptgliede genauer anzugeben. Immerhin kann diese Wahrnehmung dazu dienen, alle Glieder auf ein gemeinsames System zurückzuführen, worauf noch zurückzukommen ist.

---

[1]) In Lenz „Fluth und Ebbe und die Wirkungen des Windes auf den Meeresspiegel", S. 41, wird irrthümlich gesagt, dafs die eindringende Fluthwelle in der ganzen Breite des Flusses brande, was nicht richtig ist, auch nicht mit der auf dem Hoogly und anderen Flüssen üblichen Praxis, beim Eintreten der Fluth die Boote in die Mitte des Flusses zu bringen, wo sie aufserhalb der gefährlichen Brandung sind, übereinstimmt.

Die Form der Glieder ist dieselbe wie die der Tiden kosmischen Ursprungs, wir können sie daher gemeinsam mit diesen behandeln und fassen sie auf als Tiden, welche zu den Haupttiden hinzutreten, weshalb wir sie Nebentiden nennen wollen, da sie ihre Entstehung nicht kosmischen Ursachen, sondern lediglich dem Nebenumstande verdanken, dafs die kosmische Tide im Vergleich zur mittleren Wassertiefe eine hohe ist. Darwin nennt sie „Overtides“.

Die Bedingung für die Entstehung dieser Tiden, dafs ihre Höhe im Vergleich zur mittleren Wassertiefe grofs sein mufs, erlaubt uns die Berücksichtigung der Nebentiden auf die beiden hauptsächlichsten kosmischen Tiden, nämlich die halbtägigen Mond- und Sonnentiden, zu beschränken, welche mit M_2 und S_2 bezeichnet sind. Erstere Tide hat als Argument, soweit dasselbe kosmischen Ursprungs ist, die Gröfse $2\chi_2 - 2(s-\xi)$, letztere 2t; die entsprechenden Nebentiden haben daher die Argumente $4\chi_2 - 4(s-\xi)$, $6\chi_2 - 6(s-\xi)$, $8\chi_2 - 8(s-\xi)$ und 4t und 6t, wenn wir uns auf diese Glieder beschränken. Diese Tiden werden, analog den bisher angewandten Bezeichnungen, mit M_4, M_6, M_8, S_4 und S_6 bezeichnet.

Zweitens. Wenn mehrere Tiden von verschiedener Periode gleichzeitig in einem Kanale bestehen, so ist die resultirende Höhe einfach die Summe der Höhen der einzelnen Wellen, so lange diese Einzelhöhen im Verhältnifs zu der mittleren Tiefe unbedeutend sind. Dies Gesetz der Superposition der Wellen verliert aber seine Giltigkeit, wenn das Verhältnifs der Einzeltide zu der Tiefe ein grofses wird.[1]) In diesem Falle treten, ähnlich wie Helmholtz für Töne gezeigt hat, aufser den ursprünglichen noch andere Wellen auf, welche von der Summe und Differenz der Argumente der Einzeltiden abhängen, weil es nun nothwendig ist, die Potenzen und Produkte der Einzeltiden zu berücksichtigen. Die aus den Produkten entspringenden Tiden wollen wir zusammengesetzte Tiden nennen. Darwin nennt sie „Compound tides“ (früher wurden sie auch wohl Helmholtz-compound-tides genannt).

Welche Tiden dieser Art zu berücksichtigen sein werden, mufs in jedem einzelnen Falle besonders entschieden werden, im Allgemeinen läfst sich nur so viel sagen, dafs aller Voraussicht nach höchstens die Kombinationen der Tiden: M_2, S_2, K_1, N und O und allenfalls noch der Nebentiden M_4 und S_4 zu je zweien zu berücksichtigen sein werden. Wenn wir die Summen und Differenzen der Argumente der genannten sieben Tiden paarweise bilden (wobei wir die Kombinationen $M_4 \pm M_2$ und $S_4 \pm S_2$ weglassen, da sie schon bei den Nebentiden vorkommen, bezw. auf M_2 und S_2 zurückführen), so entstehen 36 neue Argumente, welche zu zusammengesetzten Tiden gehören. Von diesen haben neun dieselben Argumente oder vielmehr, worauf es allein ankommt, dasselbe ι wie schon entwickelte kosmische Tiden, nämlich:

die Kombination	hat das Argument oder ι von
$M_2 - K_1$	O
$M_2 - O$	K_1
$M_2 - N$	Mm
$S_2 - K_1$	P
$K_1 + O$	M_2
$K_1 - O$	Mf
$N - K_1$	Q
$N - O$	M_1
$M_4 - N$	L

so dass also die in der letzten Rubrik genannten Tiden in seichtem Wasser Störungen unterworfen sind.

Die Kombinationen $M_2 + K_1$ und $M_4 - O$, sowie $M_2 + O$ und $M_4 - K_1$ geben je dasselbe ι, erscheinen also je als eine Tide, wenn auch die Koëfficienten verschiedene sind. Darwin schlägt nun vor, sie als nur auf eine Weise, und zwar die erste aus der Kombination $M_2 + K_1$, die zweite aus $M_4 - K_1$ entstanden anzunehmen. Endlich ist noch zu erwähnen, dafs die aus den Kombinationen $S_2 - M_2$ und $S_4 - M_2$ entstehenden zusammengesetzten Tiden dieselben

[1]) „Tides and waves“, Art. 223.

ι haben wie die in (25) und (27) vorkommenden, von der Variationsstörung des Mondes abhängigen kosmischen Tiden und diese wahrscheinlich an Gröfse übertreffen, weshalb Darwin diese Tiden als zusammengesetzte und nicht als kosmische behandelt wissen will.

Von den nach Ausscheidung der oben erwähnten 9 sich mit kosmischen Tiden vereinigenden und der beiden zweimal vorkommenden Tiden noch übrig bleibenden 25 zusammengesetzten Tiden brauchen höchstens etwa 12 berücksichtigt zu werden, welche wir nachstehend mit ihren Bezeichnungen in der Reihenfolge ihrer theoretischen Wichtigkeit folgen lassen:

Bezeichnung:	Argument:	Bezeichnung:	Argument:
MK	$M_2 + K_1$	—	$S_2 + O$
MS	$M_2 + S_2$	—	$S_2 - O$
MSf	$S_2 - M_2$	2SM	$S_4 - M_2$
2MK	$M_4 - K_1$	—	$M_2 + S_4$
—	$S_2 + K_1$	2MS	$M_4 - S_2$
MN	$M_2 + N$	—	$M_4 + S_2$

Auch von diesen werden in den allermeisten Fällen nur wenige zu berücksichtigen sein. Es wird vielleicht am besten sein, bei der Beurtheilung, welche zusammengesetzten Tiden in einem gegebenen Falle mitzunehmen sein werden, so zu verfahren, dafs man die halben Amplituden der oben genannten gröfseren Tiden, wie sie sich bei der numerischen Auswerthung der Beobachtungen ergeben haben, paarweise mit einander multiplicirt und die Gröfse der Produkte als Index für die Wichtigkeit der zusammengesetzten Tiden betrachtet und dieselben nach der Gröfse dieses Index auswählt. Man wird dann sehr bald sehen, wie weit man zu gehen hat, nachdem die erste oder die ersten beiden zusammengesetzten Tiden ermittelt sind.

Die Neben- und die zusammengesetzten Tiden bilden zusammen die Seichtwasser-Tiden.

Es erübrigt noch, die meteorologischen Tiden zu erwähnen. Hierunter sind solche Schwankungen des Wasserstandes zu verstehen, welche von periodischen meteorologischen Erscheinungen abhängen. Solche sind Wind, Barometerstand und Regenfall. Der Wind ist an vielen Orten einer regelmäfsigen täglichen oder jährlichen Periode sowohl der Richtung (Land- und Seebriese, Monsune), als auch der Stärke nach unterworfen; der Barometerstand hat eine tägliche und eine jährliche Periode, welche zwar keinen sehr erheblichen, aber doch merklichen Einfluſs auf den Wasserstand ausüben kann; der Regenfall endlich hat eine ausgesprochene jährliche Periode, welche auf die Wasserstände der Flüsse und daher auch auf die Höhe der in ihren Aestuarien auftretenden Tiden einen sehr erheblichen Einfluſs hat. Die Perioden dieser meteorologischen Erscheinungen sind von dem Laufe der Sonne im Tage und Jahre abhängig, und es werden daher diejenigen Tiden, deren Perioden ganze Vielfache oder Bruchtheile eines mittleren Sonnentages oder eines tropischen Jahres sind, durch dieselben beeinfluſst werden, während sie für alle Tiden, deren Periode eine andere ist, im Laufe eines Jahres eliminirt werden, d. h. es werden nur die Sonnentiden beeinfluſst.

Aus diesem Grunde können Tiden, welche völlig zu vernachlässigen wären, wenn man ihre Entstehung aus kosmischen Ursachen betrachtet, doch sich thatsächlich als bedeutend erweisen. So kann in Flufsmündungen eine erhebliche jährliche Sonnentide (Sa) auftreten, und auch die halbjährliche (Ssa) durch meteorologische Einflüsse gesteigert werden. Dasselbe gilt von der eintägigen Tide S_1, welche, als kosmische Tide betrachtet, völlig unbedeutend ist, durch meteorologische Verhältnisse aber von Wichtigkeit werden kann. Ebenso kann auch S_2 durch diese Umstände beeinfluſst werden.

Bei der Ableitung dieser Tiden haben wir ihre Argumente $=$ h, 2h, 3h, soweit es sich um lange Perioden handelt, und $=$ t, 2t, 3t für kurze Perioden anzunehmen.

§ 5.
Art und Weise, die Resultate der harmonischen Analyse zu verzeichnen.

Wir haben nun alle Tiden kennen gelernt, welche eventuell Berücksichtigung finden müssen oder den Wasserstand an einem bestimmten Orte beeinflussen können. Dieselben haben, wie eine Betrachtung der Ausdrücke (25) bis (30), (35) und die Bemerkungen, welche wir über die Neben-, zusammengesetzten und meteorologischen Tiden gemacht haben, zeigen, allgemein die Form:

$$R \cos (\iota t - \zeta),$$

wenn wir mit R den Koëfficienten der Tide bezeichnen und

$$-\zeta = V_0 + u - \varkappa$$

setzen. R und ζ ergeben sich leicht aus den durch die harmonische Analyse gefundenen Zahlen, wie wir gleich sehen werden; sie eignen sich aber nur dazu, die Beobachtungen desjenigen Zeitraums darzustellen, welcher eben bearbeitet wird, können dagegen nicht unmittelbar mit den Resultaten eines anderen Zeitraums für denselben Ort verglichen oder für eine Vorausberechnung benutzt werden. Denn R enthält Funktionen von J als Faktoren, welche mit der Zeit veränderlich sind, und ζ kann jeden Werth von 0° bis 360° haben, da es V_0 enthält. Aufserdem kommt u, eine Funktion von ν und ξ, darin vor, welche gleichfalls mit der Zeit langsam veränderlich sind; konstant ist nur $\varkappa$. Um daher die Resultate verschiedener Jahre unter einander vergleichbar zu machen, schlägt Darwin vor, die Gröfsen R auf den mittleren Werth der in ihnen vorkommenden Funktionen von J, ν und ξ, welche ihrerseits wieder Funktionen von N, der Länge des aufsteigenden Mondknotens sind, zu reduciren, d. h. $R = f \cdot H$ zu setzen. Hierin bedeutet also H den Werth von R, welcher dem mittleren Werth der in ihm vorkommenden Funktionen von J, ν und ξ entspricht, und f ist das Verhältnifs des für R geltenden zum mittleren Werth dieser Funktionen. So ist z. B. für die Tide M_2, welche den Faktor $\cos {}^1/_2 J^4$ enthält, $f = \frac{\cos {}^1/_2 J^4}{\cos {}^1/_2 \omega^4 \cos {}^1/_2 i^4}$, weil der mittlere Werth dieses Gliedes den Koëfficienten $\cos {}^1/_2 \omega^4 \cos {}^1/_2 i^4$ hat. Wir finden demnach:

$$\varkappa = \zeta + V_0 + u$$
$$H = \frac{1}{f} R$$

Darwin's Vorschlag geht nun dahin, neben den für jedes Jahr besonders ermittelten Gröfsen R und ζ auch H und $\varkappa$ anzugeben, welche von Jahr zu Jahr mit nahe demselben Werth herauskommen müssen, wenn die Beobachtungen verschiedener Jahre überhaupt unter einander vergleichbar sind.

Will man die Zahlen benutzen, um für einen gewissen Zeitraum, z. B. ein Jahr, eine Vorausberechnung zu machen, so ist der umgekehrte Weg einzuschlagen. Wir haben dann für die Mitte des betreffenden Zeitraums den Werth von N' zu ermitteln, mit diesem die Gröfsen J', ν' und ξ', sowie für jede Tide das zugehörige u' und f' zu berechnen, ferner für den Anfangstermin (Mittag des ersten Tages des betreffenden Zeitraums) für jede Tide das V_0 zu ermitteln, dann ist:

$$R' = f'H$$
$$\zeta' = \varkappa - (V_0' + u')$$

und die Vorausberechnung geschieht nach der Formel $R' \cos (\iota t - \zeta')$, worin t von dem Anfangstermin aus gezählt wird.

Indem wir diese Bezeichnungsweise adoptiren, werden wir bei allen späteren Publikationen der Ergebnisse der harmonischen Analyse zunächst die Bezeichnung der Tide M, S, N u. s. w., auf welche sich die Angabe bezieht, dann R und ζ für das betreffende Jahr, welches bearbeitet worden ist, und daneben H und $\varkappa$ angeben. Dabei werden wir durch Indices 0, 1, 2, 3 . . . die Periode der Tide andeuten. So wurde z. B. für *Helgoland* gefunden:

Tide:	Anfangstermin: 1882 Jan. 1,0:	
M_1	$R_1 = 0{,}0023$	$H_1 = 0{,}0013$ m
	$\zeta_1 = 219°{,}8056$	$\varkappa_1 = 346°{,}8289$
M_2	$R_2 = 0{,}9669$	$H_2 = 0{,}9477$ m
	$\zeta_2 = 252°{,}4842$	$\varkappa_2 = 332°{,}9114$
M_3	$R_3 = 0{,}0036$	$H_3 = 0{,}0035$ m
	$\zeta_3 = 219°{,}1738$	$\varkappa_3 = 339°{,}8146$
M_4	$R_4 = 0{,}0576$	$H_4 = 0{,}0553$ m
	$\zeta_4 = 32°{,}0712$	$\varkappa_4 = 192°{,}9256$
M_6	$R_6 = 0{,}0182$	$H_6 = 0{,}0171$ m
	$\zeta_6 = 74°{,}7757$	$\varkappa_6 = 316°{,}0573$
M_8	$R_8 = 0{,}0068$	$H_8 = 0{,}0063$ m
	$\zeta_8 = 253°{,}4954$	$\varkappa_8 = 215°{,}2042$

M_1 ist eine eintägige, M_2 die wichtigste halbtägige Mondtide, M_3 die von der vierten Potenz der Entfernung des Mondes abhängige Tide und M_4 bis M_8 Nebentiden.

Das soeben auseinandergesetzte Verfahren der Aufzeichnung der Resultate der harmonischen Analyse läfst sich auf die meisten der im Vorhergehenden angeführten Tiden ohne Weiteres anwenden, es sind jedoch einige wenige Tiden darunter, über die noch einige Bemerkungen zu machen sind, nämlich die Tiden K_1, K_2, L und M_1. Die ersten beiden haben ihren Ursprung gemeinschaftlich in Sonne und Mond, denn sowohl die Mond- wie die Sonnentide haben dasselbe ι nämlich für K_1 $\iota = \gamma$ und für K_2 $\iota = 2\gamma$; diese beiden Tiden lassen sich daher durch die numerische Analyse nicht trennen, müssen folglich als eine Tide behandelt werden, welche ihren Ursprung gemeinschaftlich in Sonne und Mond hat, und es ist demnach noch der Ausdruck für diese Tide zu suchen. Die beiden anderen Tiden L und M_1 erfordern deswegen ebenfalls eine besondere Behandlung, weil sie schon aus zwei Tiden zusammengezogen sind, die sich durch die Analyse für ein Jahr nicht trennen lassen.

1. Die Tiden K_1 und K_2.

Der Ausdruck für die ganze Tide K_1, wie sie aus dem Zusammenwirken von Mond und Sonne entsteht, ist nach (26) und (29) von der Form:

$$M \cos(t + h - \tfrac{1}{2}\pi - \nu - \varkappa) + S \cos(t + h - \tfrac{1}{2}\pi - \varkappa).$$

Diese beiden Glieder können in eins zusammengefafst werden, indem wir setzen:

$$\operatorname{tg} \nu' = \frac{\sin \nu}{\cos \nu + \frac{S}{M}} \tag{40}$$

und

$$R = M \sqrt{1 + \left(\frac{S}{M}\right)^2 + 2\frac{S}{M}\cos \nu}$$

mithin

$$\begin{aligned} M \cos(t + h - \tfrac{1}{2}\pi - \nu - \varkappa) + S \cos(t + h - \tfrac{1}{2}\pi - \varkappa) \\ = R \cos(t + h - \tfrac{1}{2}\pi - \nu' - \varkappa) \end{aligned} \tag{41}$$

und da $t + h = h_0 + \gamma t'$, wo das t' rechts die seit dem Anfangstermin verflossene mittlere Zeit bedeutet, so ist:

$$\zeta = \varkappa + \tfrac{1}{2}\pi - h_0 + \nu' \tag{42}$$

wodurch der Ausdruck auf die Form:

$$R \cos(\gamma t - \zeta)$$

zurückgeführt ist.

Aus (42) folgt:

$$\varkappa = \zeta + h_0 - \tfrac{1}{2}\pi - \nu'. \tag{43}$$

Hierin steht $h_0 - \frac{1}{2}\pi$ für V_0 und ν' für u. Um H zu finden, müssen wir den Ausdruck für den Koëfficienten f suchen.

Wenn M_0 der mittlere Werth der Mondtide K_1 ist, so ist das Verhältnifs:

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\sin J \cos J}{\sin \omega \cos \omega \left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)}$$

während $\frac{S}{S_0} = 1$ ist.

Die Ausdrücke (26) und (29) zeigen, dafs:

$$\frac{M}{S} = \frac{\tau \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \sin J \cos J}{\tau_1 \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right) \sin \omega \cos \omega}$$

daher:

$$\frac{S_0}{M_0} = \frac{\tau_1 \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right)}{\tau \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)} \tag{44}$$

und der Koëfficient: [1])

$$f = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{S}{M}\right)^2 + 2 \frac{S}{M} \cos \nu}}{1 + \frac{S_0}{M_0}} \cdot \frac{M}{M_0} \tag{45}$$

Wir wollen noch bemerken, dafs:

$$\frac{S}{M} = \frac{S_0}{M_0} \frac{\sin \omega \cos \omega \left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)}{\sin J \cos J}$$

ist, und wenn wir:

$$k_1 = \frac{\sin \omega \cos \omega \left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)}{\sin J \cos J} \tag{46}$$

setzen und $\frac{S_0}{M_0}$ numerisch berechnen, so wird:

$$\frac{S_0}{M_0} = 0{,}46407$$

$$\frac{S}{M} = k_1 \cdot 0{,}46407$$

und:

$$f = \frac{\sqrt{1 + (0{,}46407\, k_1)^2 + (0{,}92814\, k_1) \cos \nu}}{1{,}46407 \cdot k_1} \tag{47}$$

Für die Tide K_2 machen wir dieselbe Entwickelung und setzen:

$$\operatorname{tg} 2\nu'' = \frac{\sin 2\nu}{\cos 2\nu + \frac{S}{M}} \tag{48}$$

$$f = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{S}{M}\right)^2 + 2 \frac{S}{M} \cos 2\nu}}{1 + \frac{S_0}{M_0}} \cdot \frac{M}{M_0} \tag{49}$$

wo:

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\sin J^2}{\sin \omega^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)}$$

$$\frac{S_0}{M_0} = \frac{\tau_1 \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right)}{\tau \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)} = 0{,}46407$$

---

[1]) Wie Herr Prof. Darwin den Verf. dieses brieflich benachrichtigt hat, findet sich in der Abhandlung des Herrn Darwin ein Fehler, indem in den dortigen Ausdrücken (43) und (44) für f der Faktor $\frac{M}{M_0}$ und in der Gleichung (56) für $\frac{1}{f}$ im Zähler der Faktor k_2 weggelassen ist.

und

$$\frac{S}{M} = \frac{S_0}{M_0} \frac{\sin \omega^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)}{\sin J^2} = 0{,}46407\ k_2$$

wenn:

$$k_2 = \sin \omega^2 \frac{\left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)}{\sin J^2} \tag{50}$$

gesetzt wird. Daher ist auch:

$$f = \frac{\sqrt{1 + (0{,}46407\ k_2)^2 + (0{,}92814\ k_2) \cos 2\nu}}{1{,}46407 \cdot k_2} \tag{51}$$

2. Die Tiden L und M_1.

Der Ausdruck für die Tide M_1 ist nach (23):

$$e \sin J \cos {}^1/_2 J^2 \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 2(p - \xi)} \cos (\chi_1 - [s - \xi] + Q - {}^1/_2 \pi)$$

wo $\operatorname{tg} Q = {}^1/_2 \operatorname{tg} (p - \xi)$.

Wir müssen hier Q zu $V_0 + u$ rechnen, was wenig befriedigend ist, weil es sich im Laufe eines Jahres sehr erheblich ändert (die Länge des Perigäums p ändert sich in einem Jahre um 40°), und ebenso müssen wir in dem Koëfficienten f: $p - \xi$ als konstant ansehen.

Um nun den Fehler, den wir dadurch begehen, auf ein möglichst geringes Maſs herabzubringen, wollen wir zur Berechnung von Q und in dem Koëfficienten f den Werth von $p - \xi$ anwenden, welcher der Mitte des der Bearbeitung unterworfenen Zeitraums entspricht. Nennen wir diesen Werth von $p - \xi = P$, so wird also:

$$\operatorname{tg} Q = {}^1/_2 \operatorname{tg} P \tag{52}$$

und

$$f = \frac{\sin J \cos {}^1/_2 J^2}{\sin \omega \cos {}^1/_2 \omega^2 \cos {}^1/_2 i^4} \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 2P} \tag{53}$$

Dasselbe gilt für die Tide L. Der Ausdruck für dieselbe ist nach (24):

$${}^1/_2 e \cos {}^1/_2 J^4 \sqrt{1 - 12 \operatorname{tg} {}^1/_2 J^2 \cos 2(p - \xi)} \cos (2\chi_2 - 2[s - \xi] + [s - p] - R + \pi)$$

wo:

$$\operatorname{tg} R = \frac{6 \sin 2(p - \xi)}{\cot {}^1/_2 J^2 - 6 \cos 2(p - \xi)}$$

Auch hier müssen wir R als Theil von $V_0 + u$ ansehen und berechnen daher R nach der Formel:

$$\operatorname{tg} R = \frac{6 \sin 2P}{\cot {}^1/_2 J^2 - 6 \cos 2P} \tag{54}$$

und:

$$f = \frac{\cos {}^1/_2 J^4}{\cos {}^1/_2 \omega^4 \cos {}^1/_2 i^4} \sqrt{1 - 12 \operatorname{tg} {}^1/_2 J^2 \cos 2P} \tag{55}$$

Hiermit sind nun alle Tiden auf die Form $R \cos (\iota t - \zeta)$ gebracht worden.

§ 6.

Formeln zur Berechnung von J, ν, ξ und der mittleren Werthe der Koëfficienten.

Wir haben schon früher für die Berechnung von J, ν und ξ Formeln gegeben, nämlich:

$$\begin{aligned} \cos J &= \cos i \cos \omega - \sin i \sin \omega \cos N \\ \cot \nu \sin N &= \cos N \cos \omega + \cot i \sin \omega \\ \cot (N - \xi) \sin N &= \cos N \cos i + \cot \omega \sin i \end{aligned}$$

Diese sind für die numerische Berechnung etwas unbequem, lassen sich aber leicht für logarithmische Rechnung einrichten. Setzen wir:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} i \cos N$$

so wird:

$$(56) \qquad \begin{cases} \cos J = \cos i \sec\beta \cos(\omega+\beta) \\ \sin\nu = \sin i \operatorname{cosec} J \sin N \\ \sin(N-\xi) = \sin\omega \operatorname{cosec} J \sin N \end{cases}$$

Wir können auch ν und ξ direkt finden, ohne erst J berechnen zu müssen, durch die Formeln:

$$(57) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\xi = \dfrac{\sin i \cot\omega \sin N (1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2} i \operatorname{tg}\omega \cos N)}{\cos\frac{1}{2} i^2 + \sin i \cot\omega \cos N - \sin\frac{1}{2} i^2 \cos 2N} \\ \operatorname{tg}\nu = \dfrac{\operatorname{tg} i \operatorname{cosec}\omega \sin N}{1 + \operatorname{tg} i \cot\omega \cos N} \end{cases}$$

Eine Tabelle über J, ν und ξ für die verschiedenen Werthe von N findet man als Anhang zu dieser Abhandlung. Dieselbe ist der Arbeit von Darwin entnommen und unter Leitung des Major Baird berechnet worden, doch haben wir sie dahin abgeändert, dafs wir Bruchtheile von Graden anstatt Minuten und Sekunden geben.

Was die mittleren Werthe der Koëfficienten anlangt, so würde die Durchführung der Entwickelung der Ausdrücke für dieselben hier zu weit führen; wir beschränken uns daher auf den Hinweis auf § 6 der Abhandlung von Darwin. Die Koëfficienten der Tiden enthalten gewisse Funktionen von J und die Winkel solche von ν und ξ, wir können sie daher auf die Form $G\cos(T+u)$ bringen, wo G eine Funktion von J und u eine solche von ν und ξ ist. Setzen wir für J, ν und ξ ihre Ausdrücke durch ω, i und N ein und entwickeln dies, so werden wir eine Reihe von Gliedern erhalten, von denen eins von N unabhängig ist, es sei dies $G_1 \cos T$, dann ist G_1 der mittlere Werth des Koëfficienten. Diese Entwickelung würde aber, wie gesagt, sehr weitläufig sein, und wir begnügen uns daher damit, nach Darwin ihr Resultat mitzutheilen. Danach ist der mittlere Werth für die Tiden mit dem Koëfficienten:

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2} J^4 &: \cos\tfrac{1}{2}\omega^4 \cos\tfrac{1}{2} i^4 \\
\sin J^2 &: \sin\omega^2 \left(1 - \frac{3}{2}\sin i^2\right) \\
\sin J \cos\tfrac{1}{2} J^2 &: \sin\omega \cos\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos\tfrac{1}{2} i^4 \\
\sin J \sin\tfrac{1}{2} J^2 &: \sin\omega \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos\tfrac{1}{2} i^4 \\
\sin J \cos J &: \sin\omega\cos\omega \left(1 - \frac{3}{2}\sin i^2\right) \\
\sin J^2 &: \sin\omega^2 \cos\tfrac{1}{2} i^4 \\
1 - \frac{3}{2}\sin J^2 &: \left(1 - \frac{3}{2}\sin\omega^2\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin i^2\right)
\end{aligned}$$

Die Verschiedenheit des mittleren Werthes für die beiden $\sin J^2$ rührt daher, dafs für das erstere der beiden ebenso wie für $\sin J \cos J$ im Winkel nur ν, für das letztere nur ξ vorkommt.

Am Schlusse dieser Abhandlung findet man eine Tabelle, welche von 0,1° zu 0,1° von J die Logarithmen von $\frac{1}{f} = \frac{\cos\frac{1}{2}\omega^4 \cos\frac{1}{2} i^4}{\cos\frac{1}{2} J^4}$ u. s. w. giebt. Diese Tabelle ist neu berechnet, da die Darwin'sche Abhandlung eine solche mit den natürlichen Zahlen von $\frac{1}{f}$ und f von 10′ zu 10′ enthält, was nicht besonders bequem ist.

§ 7.

Uebersicht über die zu berücksichtigenden Tiden. Grössen zur Berechnung der Argumente.

Die nachfolgende Uebersichtstabelle enthält alle Tiden, welche wir bisher als berücksichtigenswerth kennen gelernt haben. Neben der Bezeichnung der Tide ist in derselben der astronomische Theil der Koëfficienten A und der astronomische Theil des Arguments $V_0 + u$ aufgeführt, d. h. diejenigen Gröfsen, welche von der Stellung der anziehenden Körper am Himmel und den Elementen ihrer Bahn abhängen, wogegen die von lokalen Verhältnissen abhängigen Gröfsen, ebenso wie der gemeinschaftliche Faktor $\frac{3\,Ma^2}{c^3}$, weggelassen worden sind. Aufserdem ist zu den Koëfficienten noch zu bemerken, dafs dieselben gewisse numerische Faktoren enthalten, die in unseren Formeln (25) u. s. w. nicht vorkommen. Diese sind hinzugefügt worden, um diese Tabelle mit der in Darwin's Abhandlung enthaltenen konform zu machen. Ferner enthält die Tabelle die Aenderung des Arguments in der Zeiteinheit, und zwar den algebraischen Ausdruck und die numerische Gröfse derselben in einer Stunde mittlerer Zeit, welche letztere Einheit allen praktischen Anwendungen der harmonischen Analyse zu Grunde gelegt wird. Die letzte Rubrik endlich enthält den Ausdruck für den Reduktionsfaktor $\frac{1}{f}$, mit welchem die numerisch ermittelte Gröfse der betreffenden Tide multiplicirt werden mufs, um das für den mittleren Werth des von J, ν und ξ abhängigen Theils des Koëfficienten geltende H zu erhalten.

Die Tabelle ist in drei Gruppen getheilt, von denen die erste die Tiden von eintägiger und halbtägiger Periode sowie die Nebentiden umfafst, während die zweite die zusammengesetzten und die dritte die Tiden von längerer Periode enthält.

Um den Ausdruck für irgend eine Tide hinzuschreiben, haben wir folgende Regeln.

1. Tiden von eintägiger Periode:

$$R_1 \cos(\iota t - \zeta_1) = \frac{3Ma^2}{c^3} 2 L_1' \frac{k}{\gamma^2 a^2 - 4gk}\left(1 - \frac{2\gamma a^2}{\gamma^2 a^2 - 4gk}\iota'\right) A \cos(\iota t + V_0 + u - \varkappa_1')$$

2. Tiden von halbtägiger Periode:

$$R_2 \cos(\iota t - \zeta_2) = \frac{3Ma^2}{c^3} 2 L_2' \frac{k}{4\gamma^2 a^2 - 4gk}\left(1 - \frac{4\gamma a^2}{4\gamma^2 a^2 - 4gk}\iota'\right) A \cos(\iota t + V_0 + u - \varkappa_2')$$

3. Tiden von dritteltägiger Periode:

$$R_3 \cos(\iota t - \zeta_3) = \frac{3Ma^2}{c^3} L_3' \frac{k}{9\gamma^2 a^2 - 4gk}\left(1 - \frac{6\gamma a^2}{9\gamma^2 a^2 - 4gk}\iota'\right) A \cos(\iota t + V_0 + u - \varkappa_3')$$

4. Tiden von längerer Periode:

$$R_0 \cos(\iota t - \zeta_0) = \frac{3Ma^2}{c^3} \cdot \frac{3}{8g} L_0' A \cos(\iota t + V_0 + u - \varkappa_0')$$

5. Nebentiden:

$R_n \cos(\iota t - \zeta_n) = L_n' \times$ Potenz des Koëff. der betr. Tide $\times \cos(\iota t + V_0 + u - \varkappa_n')$

6. Zusammengesetzte Tiden:

$R_m \cos(\iota t - \zeta_m) = L_m' \times$ Produkt der Koëff. der betheiligten Tiden $\times \cos(\iota t + V_0 + u - \varkappa_m')$

Es ist hierbei zu beachten, dafs L_0', L_1', L_2' . . . und $\varkappa_0'$, $\varkappa_1'$ $\varkappa_2'$ . . . die den freien Wellen entsprechenden Werthe der Lokalgröfsen sind, ferner dafs ι' die in der mit ι überschriebenen Rubrik der nachstehenden Uebersicht

auf γ, 2γ oder 3γ folgenden Gröfsen bezeichnet. Endlich mufs für eine etwaige numerische Auswerthung der Koëfficienten beachtet werden, dafs die darin vorkommenden γ und ι' die in Theilen des Radius ausgedrückten Aenderungen des Arguments in einer Zeitsekunde sind, weil für die Gröfse g, die Schwerebeschleunigung, diese Zeiteinheit gilt. Uebrigens giebt die daneben stehende, in Graden und Bruchtheilen ausgedrückte Aenderung in einer mittleren Stunde die Aenderung in einer Zeitsekunde, wenn man sie als in Bogensekunden (anstatt in Graden) ausgedrückt annimmt, so ist z. B. $\gamma - \sigma = 14''{,}4920521$ die Aenderung des Arguments in einer Zeitsekunde, und dies durch $206264''{,}8$ (log 5,3144253) dividirt, giebt das in den Koefficienten anzuwendende $\iota = \gamma + \iota'$.

Von den in nebenstehender Uebersicht aufgeführten Tiden wird man in den meisten Fällen eine ganze Anzahl unberücksichtigt lassen können, wir haben sie aber alle aufgeführt, um auch solche Fälle einzuschliefsen, wo sich ihre Berücksichtigung als nothwendig oder wünschenswerth erweisen sollte. Es wird im Allgemeinen vollauf genügen, von der ersten Gruppe die 11 ersten Tiden (bis T incl.) abzuleiten, und auch von diesen können, wenigstens bei einer ersten Berechnung, ν, J und T unberücksichtigt bleiben. Wir haben schon früher erwähnt, auf welche Weise man ermitteln kann, welche Tiden der zweiten Gruppe die Berücksichtigung lohnen, meist wird es wohl ausreichen, die beiden, allenfalls die vier, ersten mitzunehmen. Ebenso genügt es, in der dritten Gruppe die Untersuchung auf die vier ersten Tiden (28 bis 31 incl.) zu beschränken.

Wir haben nun noch die Zahlenwerthe anzuführen, welche gebraucht werden, um V_0 zu berechnen, und können dann zu der Auseinandersetzung der praktischen Anwendung der harmonischen Analyse übergehen. Wir entnehmen der Abhandlung von Darwin folgende Formeln zur Berechnung von s_0, p_0, N_0, h_0 und p_1.

Für 1880 Januar 1 0^h mittlere Zeit zu Greenwich ist:

(58)
$$\begin{cases} s_0 = 150{,}0419 + 132{,}67900\,T + 3{,}29410\,d + 13{,}1764\,D - 0{,}54902\,L \\ p_0 = 240{,}6322 + 40{,}69035\,T + 0{,}02785\,d + 0{,}1114\,D - 0{,}00464\,L \\ N = 285{,}9569 - 19{,}34146\,T - 0{,}01321\,d - 0{,}0529\,D \\ h_0 = 280{,}5287 + 0{,}00769\,T + 0{,}24641\,d + 0{,}9856\,D - 0{,}04107\,L \\ p_1 = 280{,}8748 + 0{,}01711\,T + 0{,}00001\,d + 0{,}000047\,D \end{cases}$$

Hierin bedeutet T die seit 1880 verflossene Anzahl Jahre, d ist $= 4n - T$, wenn 4n dasjenige Vielfache von 4 bezeichnet, welches gleich oder zunächst gröfser als T ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, d ist die Anzahl Jahre, welche noch bis zum nächsten auf $1880 + T$ folgenden Schaltjahre fehlen. Ist $1880 + T$ selbst ein Schaltjahr, so ist $d = 0$. Es ist also im Schaltjahr $d = 0$, im ersten auf ein Schaltjahr folgenden Jahre $d = 3$, im zweiten $= 2$, im dritten $= 1$.

D ist die Anzahl der seit 1. Januar verflossenen Tage, wobei Schalttage nicht gerechnet werden, und L die östliche Länge des Beobachtungsorts in Stunden und Decimalen. Da das Jahr 1900 kein Schaltjahr ist, so mufs für alle Data nach dem 28. Februar 1900 von s_0, h_0, p_0 und p_1 die Bewegung für einen Tag subtrahirt und zu N die Bewegung für einen Tag addirt werden.

Als Anhang zu dieser Arbeit geben wir Tabellen für die Gröfsen s_0, h_0, p_0 und N. Es scheint unnöthig, eine besondere Tabelle für p_1 zu geben, da diese Gröfse nur wenig gebraucht wird und sich nur langsam ändert; man wird sie leicht aus den Angaben in Gleichung (58) berechnen.

No.	Bezeichnung der Tide	Astronomischer Theil des Koëfficienten A	Astronomischer Theil des Arguments um 0^h am ersten Tage des Beobachtungszeitraums $V_0 + u$	Aenderung des Arguments in der Zeiteinheit ι	in 1^h mittlerer Sonnenzeit	Reduktionsfaktor: $\frac{1}{f}$
1	M_1	$e \cdot \frac{1}{2} \sin J \cos \frac{1}{2} J^2 \times \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 2(p - \xi)}$	$(h_0 - \nu) - (s_0 - \xi) + Q - \frac{1}{2}\pi$ wo: $\operatorname{tg} Q = \frac{1}{2} \operatorname{tg} P$	$\gamma - \sigma$	14,°4920521	$\frac{\text{Faktor von O}}{\sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 2P}}$
	M_2	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{2} e^2\right) \cos \frac{1}{2} J^4$	$2(h_0 - \nu) - 2(s_0 - \xi)$	$2\gamma - 2\sigma$	28,9841042	$\left(\frac{\cos \frac{1}{2} \omega \cos \frac{1}{2} i}{\cos \frac{1}{2} J}\right)$
	M_3	$\frac{5}{2} \frac{a}{c} \cos \frac{1}{2} J^6$	$\frac{3}{2} \times$ Arg. M_2	$3\gamma - 3\sigma$	43,4761563	(Faktor von $M_2)^{3/2}$
	M_4		$2 \times$ Arg. M_2	$4\gamma - 4\sigma$	57,9682082	(Faktor von $M_2)^2$
	M_6		$3 \times$ Arg. M_2	$6\gamma - 6\sigma$	86,9523126	(Faktor von $M_2)^3$
	M_8		$4 \times$ Arg. M_2	$8\gamma - 8\sigma$	115,9364164	(Faktor von $M_2)^4$
2	S_1		0	$\gamma - \eta$	15,0000000	1
	S_2	$\frac{1}{2} \frac{\tau_1}{\tau}\left(1 - \frac{5}{2} e_1^2\right) \cos \frac{1}{2} \omega^4$	0	$2\gamma - 2\eta$	30,0000000	1
	S_3		0	$3\gamma - 3\eta$	45,0000000	1
	S_4		0	$4\gamma - 4\eta$	60,0000000	1
	S_6		0	$6\gamma - 6\eta$	90,0000000	1
3	K_1	$\left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \frac{1}{2} \sin J \cos J \times \sqrt{1 + (0{,}464 k_1)^2 + 0{,}928 k_1 \cos \nu}$ wo: $k_1 = \frac{\sin 2\omega \left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)}{\sin 2J}$	$h_0 - \nu' - \frac{1}{2}\pi$ wo: $\operatorname{tg} \nu' = \frac{\sin \nu}{\cos \nu + 0{,}464 k_1}$	γ	15,0410686	$\frac{1{,}46407 \cdot k_1}{\sqrt{1 + (0{,}46407 k_1)^2 + 0{,}92814 k_1 \cos \nu}}$
	K_2	$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \frac{1}{2} \sin J^2 \times \sqrt{1 + (0{,}464 k_2)^2 + 0{,}928 k_2 \cos 2\nu}$ wo: $k_2 = \frac{\sin \omega^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)}{\sin J^2}$	$2h_0 - 2\nu''$ wo: $\operatorname{tg} 2\nu'' = \frac{\sin 2\nu}{\cos 2\nu + 0{,}464 k_2}$	2γ	30,0821372	$\frac{1{,}46407 \cdot k_2}{\sqrt{1 + (0{,}46407 k_2)^2 + 0{,}92814 k_2 \cos 2\nu}}$

No.	Bezeichnung der Tide	Astronomischer Theil des Koëfficienten A	Astronomischer Theil des Arguments um 0^h am ersten Tage des Beobachtungszeitraums $V_0 + u$	Aenderung des Arguments in der Zeiteinheit ι	in 1^h mittlerer Sonnenzeit	Reduktionsfaktor: $\frac{1}{f}$
4	O	$\left(1 - \frac{5}{2} e^2\right) \frac{1}{2} \sin J \cos \frac{1}{2} J^2$	$(h_0 - \nu) - 2(s_0 - \xi) + \frac{1}{2}\pi$	$\gamma - 2\sigma$	$13^\circ,9430356$	$\frac{\sin \omega \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \frac{1}{2} i^4}{\sin J \cos \frac{1}{2} J^2}$
5	N	$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} e \cos \frac{1}{2} J^4$	Arg. $M_2 - (s_0 - p_0)$	$2\gamma - 3\sigma + \varpi$	28,4397296	Faktor von M_2
6	P	$\frac{\tau_1}{\tau}\left(1 - \frac{5}{2} e_1^2\right) \frac{1}{2} \sin \omega \cos \frac{1}{2} \omega^2$	$-h_0 + \frac{1}{2}\pi$	$\gamma - 2\eta$	14,9589314	1
7	Q	$\frac{7}{2} e \cdot \frac{1}{2} \sin J \cos \frac{1}{2} J$	Arg. $O - (s_0 - p_0)$	$\gamma - 3\sigma + \varpi$	13,3986609	Faktor von O
8	ν	$\frac{1}{2} \cdot \frac{105}{16} m e \cos \frac{1}{2} J^4$	Arg. $M_2 + (s_0 - p_0) + 2h_0 - 2s_0$	$2\gamma - 3\sigma - \varpi + 2\eta$	28,5125830	Faktor von M_2
9	J	$\frac{3}{2} e \cdot \sin J \cos J$	$(h_0 - \nu) + (s_0 - p_0) - \frac{1}{2}\pi$	$\gamma + \sigma - \varpi$	15,5854433	$\frac{\sin 2\omega \left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)}{\sin 2J}$
10	L	$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e \cos \frac{1}{2} J^4 \times}{\sqrt{1 - 12 \operatorname{tg} \frac{1}{2} J^2 \cos 2(p - \xi)}}$	wo: Arg. $M_2 + (s_0 - p_0) - R + \pi$, $\operatorname{tg} R = \frac{6 \sin 2P}{\cot \frac{1}{2} J^2 - 6 \cos 2P}$	$2\gamma - \sigma - \varpi$	29,5284788	$\frac{\text{Faktor von } M_2}{\sqrt{1 - 12 \operatorname{tg} \frac{1}{2} J^2 \cos 2P}}$
11	T	$\frac{\tau_1}{\tau} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} e_1 \cos \frac{1}{2} \omega^4$	$-(h_0 - p_1)$	$2\gamma - 3\eta$	29,9589314	1
12	2N	$\frac{1}{2} \cdot \frac{17}{2} e^2 \cos \frac{1}{2} J^4$	Arg. $M_2 - 2(s_0 - p_0)$	$2\gamma - 4\sigma + 2\varpi$	27,8953548	Faktor von M_2
13	OO	$\left(1 - \frac{5}{2} e^2\right) \frac{1}{2} \sin J \sin \frac{1}{2} J^2$	$(h_0 - \nu) + 2(s_0 - \xi) - \frac{1}{2}\pi$	$\gamma + 2\sigma$	16,1391016	$\frac{\sin \omega \sin \frac{1}{2} \omega^2 \cos \frac{1}{2} i^4}{\sin J \sin \frac{1}{2} J^2}$
14		$\frac{105}{16} m e \frac{1}{2} \sin J \cos \frac{1}{2} J^2$	$(h_0 - \nu) - 2(s_0 - \xi) + (s_0 - p_0) + 2h_0 - 2s_0 - \frac{1}{2}\pi$	$\gamma - 3\sigma - \varpi + 2\eta$	13,4715144	Faktor von O
15		$\frac{17}{2} e^2 \cdot \frac{1}{2} \sin J \cos \frac{1}{2} J^2$	$(h_0 - \nu) - 2(s_0 - \xi) - 2(s_0 - p_0) + \frac{1}{2}\pi$	$\gamma - 4\sigma + 2\varpi$	12,8542862	Faktor von O

16	λ	$\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{16} m e \cos \frac{1}{2} J^4$	Arg. $M_2 - (s_0 - p_0) - 2h_0 + 2s_0 + \pi$	$2\gamma - \sigma + \varpi - 2\eta$	29,4556254	Faktor von M_2
17	MK	Faktor v. $M_2 \times$ Faktor v. K_1	Arg. M_2 + Arg. K_1	$3\gamma - 2\sigma$	44,0251728	Faktor v. $M_2 \times$ Faktor v. K_1
18	MS	Faktor v. $M_2 \times$ Faktor v. S_2	Arg. M_2	$4\gamma - 2\sigma - 2\eta$	58,9841042	Faktor von M_2
19	μ oder 2MS	Faktor v. $S_2 \times$ Faktor v. M_4	Arg. M_4	$2\gamma - 4\sigma + 2\eta$	27,9682084	Faktor von M_4
20		Faktor v. $S_2 \times$ Faktor v. K_1	Arg. K_1	$3\gamma - 4\eta$	45,0410686	Faktor von K_1
21	MN	Faktor v. $M_2 \times$ Faktor v. N	Arg. M_2 + Arg. N	$4\gamma - 5\sigma + \varpi$	57,4238338	Faktor v. $M_2 \times$ Faktor v. N
22	2MK	Faktor v. $M_4 \times$ Faktor v. K_1	Arg. M_4 — Arg. K_1	$3\gamma - 4\sigma$	42,9271398	Faktor v. $M_4 \times$ Faktor v. K_1
23		Faktor v. $S_2 \times$ Faktor v. O	Arg. O	$3\gamma - 2\sigma - 2\eta$	43,9430356	Faktor von O
24		Faktor v. $S_2 \times$ Faktor v. O	2π — Arg. O	$\gamma + 2\sigma - 2\eta$	16,0569644	Faktor von O
25	2SM	Faktor v. $S_4 \times$ Faktor v. M_2	2π — Arg. M_2	$2\gamma + 2\sigma - 4\eta$	31,0158958	Faktor von M_2
26		Faktor v. $S_4 \times$ Faktor v. M_2	Arg. M_2	$6\gamma - 2\sigma - 4\eta$	88,9841042	Faktor von M_2
27		Faktor v. $S_2 \times$ Faktor v. M_4	Arg. M_4	$6\gamma - 4\sigma - 2\eta$	87,9682084	Faktor von M_4
28	Mf	$\left(1 - \frac{5}{2} e^2\right) \frac{1}{2} \sin J^2$	$2(s_0 - \xi)$	2σ	1,0980330	$\frac{\sin \omega^2 \cos \frac{1}{2} i^4}{\sin J^2}$
29	Mm	$3e \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin J^2\right)$	$s_0 - p_0$	$\sigma - \varpi$	0,5443747	$\frac{\left(1 - \frac{3}{2} \sin \omega^2\right)\left(1 - \frac{3}{2} \sin i^2\right)}{1 - \frac{3}{2} \sin J^2}$
30	Sa		h_0	η	0,0410686	1
	Ssa	$\frac{\tau_1}{\tau} \left(1 - \frac{5}{2} e_1^2\right) \frac{1}{2} \sin \omega^2$	$2h_0$	2η	0,0821372	1
31	MSf	Faktor v. $M_2 \times$ Faktor v. S_2	2π — Arg. M_2	$2\sigma - 2\eta$	1,0158958	Faktor von M_2
32		$\frac{7}{2} e \cdot \frac{1}{2} \sin J^2$	$(s_0 - p_0) + 2(s_0 - \xi)$	$3\sigma - \varpi$	1,6424077	Faktor von Mf
33		$\frac{45}{8} m e \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin J^2\right)$	$-(s_0 - p_0) + 2s_0 - 2h_0$	$\sigma - 2\eta + \varpi$	0,4715211	Faktor von Mm

§ 8.

Numerische Ausführung der harmonischen Analyse für die Tiden von kurzer Periode.

Wir haben nun zu zeigen, wie die Zahlenwerthe für die im Vorhergehenden entwickelten Tiden aus dem gegebenen Beobachtungsmaterial abgeleitet werden können.

Als gegeben setzen wir Aufzeichnungen des Wasserstandes für jede Stunde mittlerer Sonnenzeit während eines Jahres voraus, welche entweder durch direkte Beobachtung an einem Pegel oder durch Entnahme aus den von einem selbstregistrirenden Fluthmesser gelieferten Wasserstands-Kurven erhalten sein können. Die Aufgabe ist nun, aus diesem Material für jede Tide 24 Mittelwerthe zu bilden, von denen jeder für ein bestimmtes $^1/_{24}$ der Periode der Tide von 0 bis 23 gilt. Wir nennen $^1/_{24}$ der Periode eine Tidestunde und unterscheiden je nach der Tide M-Stunden, S-Stunden u. s. w.

Dies geschieht, wie sogleich näher beschrieben werden wird, dadurch, dafs wir die unmittelbar gegebenen Wasserstände für jede Tide in besonderer Weise in Formulare eintragen, welche für jede Tidestunde eine Vertikal-Kolumne enthalten. Die in jeder Kolumne stehenden Zahlen werden addirt und durch Division mit der Anzahl der in dieselbe eingetragenen Beobachtungen das Mittel für jede Vertikalspalte gebildet; dann darf angenommen werden, dafs in diesen Mittelwerthen der Einfluſs aller andern Tiden mit Ausnahme derjenigen, welche wir suchen, eliminirt ist, sobald nur die Anzahl der Beobachtungen, d. h. der Zeitraum, über welchen sie sich erstrecken, hinreichend groſs angenommen wird; wir nehmen dafür den Zeitraum von nahe einem Jahre an. Die 24 so erhaltenen Mittelwerthe, welche für die Tidestunden 0^h bis 23^h gelten, geben dann den Verlauf der gesuchten Tide innerhalb einer ganzen Periode derselben oder während eines Tidetages. Der Ausdruck für den Wasserstand h_t zu einer bestimmten Tidestunde t unter Berücksichtigung der von der vierten Potenz der Entfernung abhängigen und der Neben-Tiden ist:

$$h_t = A_0 + R_1 \cos(nt - \zeta_1) + R_2 \cos(2nt - \zeta_2) + R_3 \cos(3nt - \zeta_3) + \ldots + R_8 \cos(8nt - \zeta_8).$$

Hierin ist $n = 15°$ und t successive $= 0, 1, 2, 3 \ldots 23$ zu setzen, um die Wasserstände für jede einzelne Tidestunde zu erhalten.

Setzen wir $R_1 \cos \zeta_1 = A_1$, $R_1 \sin \zeta_1 = B_1$, $R_2 \cos \zeta_2 = A_2$, $R_2 \sin \zeta_2 = B_2$ u. s. w., so können wir auch schreiben:

$$(59) \qquad h_t = A_0 + A_1 \cos nt + A_2 \cos 2nt + A_3 \cos 3nt + \ldots + A_8 \cos 8nt + B_1 \sin nt + B_2 \sin 2nt + B_3 \sin 3nt + \ldots + B_8 \sin 8nt$$

und es ist unsere Aufgabe, die Koëfficienten A_0, A_1, $A_2 \ldots A_8$, B_1, $B_2 \ldots B_8$ aus den 24 Werthen für h_t zu ermitteln.

Indem wir zur Lösung dieser Aufgabe die Methode der kleinsten Quadrate anwenden, gelangen wir zu sehr einfachen Ausdrücken, welche wir nun ableiten wollen. Es wird nützlich sein, ein Paar für die Summirung von Reihen von Cosinussen und Sinussen, deren Winkel in arithmetischer Progression wachsen, gültige Sätze vorherzuschicken, welche später noch Verwendung finden werden, wenn wir zu der Ableitung der Tiden von längerer Periode kommen.

Es sei die Summe der Reihen

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos tx$$

und

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin tx$$

zu suchen, in denen der Winkel jedes folgenden Gliedes um x gröfser ist als der des vorhergehenden.

Multipliciren und dividiren wir jede Reihe mit $\sin {}^1/_2 x$, wodurch nichts geändert wird, und bezeichnen wir eine Summirung zwischen den Grenzen $i = o$ und $i = t$ wie üblich durch $\sum_{i=o}^{i=t}$, so wird:

$$
(60)\quad
\begin{cases}
\sum_{i=o}^{i=t} \cos i x = (1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos tx)\dfrac{\sin \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} \\
\quad = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{2} x}\left(\sin \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}\sin \frac{3}{2} x + \frac{1}{2}\sin \frac{5}{2} x + \ldots + \frac{1}{2}\sin \frac{2t+1}{2} x\right. \\
\qquad\qquad \left. - \frac{1}{2}\sin \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}\sin \frac{3}{2} x - \ldots - \frac{1}{2}\sin \frac{2t-1}{2} x\right) \\
\quad = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{2} x}\,\frac{1}{2}\left(\sin \frac{1}{2} x + \sin \frac{2t+1}{2} x\right) = \dfrac{\sin \frac{t+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x}\cos \frac{1}{2} tx
\end{cases}
$$

und ebenso:

$$
\begin{cases}
\sum_{i=o}^{i=t} \sin i x = (\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin tx)\dfrac{\sin \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} \\
\quad = \dfrac{\sin \frac{t+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x}\sin \frac{1}{2} tx.
\end{cases}
$$

Ferner da $\cos i x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2 i x$ und $\sin i x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2 i x$:

$$
(60a)\quad
\begin{cases}
\sum_{i=o}^{i=t} \cos i x^2 = \dfrac{1}{2}(t+1) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin (t+1)\, x}{\sin x}\cos tx \\
\sum_{i=o}^{i=t} \sin i x^2 = \dfrac{1}{2}(t+1) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin (t+1)\, x}{\sin x}\sin tx
\end{cases}
$$

Wenden wir nun auf (59) die Methode der kleinsten Quadrate an, so werden bekanntlich die Normalgleichungen gebildet, indem wir jede der 24 Bedingungsgleichungen mit den in ihr vorkommenden Koëfficienten derjenigen Unbekannten multipliciren, für welche wir die Normalgleichung bilden wollen und darauf alle Gleichungen algebraisch addiren, d. h. um die Normalgleichung für A_0 zu bilden, multipliciren wir alle Gleichungen mit 1 und addiren, für A_1 multipliciren wir mit $\cos nt$, bilden wieder die Summe u. s. f. Nun sieht man aber leicht, dafs die Summe der Cosinusse, der Sinusse und ihrer Produkte $= 0$ sein müsse, denn da $t = 23$ und $x = n = 2n$ u. s. w. zu setzen ist, so ist in Formel (60) $\frac{(t+1)}{2} x$ immer ein Vielfaches von 180° oder 360°, daher $\sin \frac{t+1}{2} x = 0$. Es bleibt daher jedesmal nur das Glied übrig, welches mit der Unbekannten, für welche die Normalgleichung gebildet wird, multiplicirt ist, weil dieses mit dem Quadrat eines Cosinus oder Sinus multiplicirt ist, dessen Summe nach (60a) $= \frac{1}{2}(t+1) = 12$ wird, weil das zweite Glied aus gleichem Grunde wie vorher verschwindet.

Wir erhalten daher zur Bestimmung von A_0, A_1, B_1, A_2, B_2 u. s. w. die einfachen Gleichungen:

$$
(61)\quad
\begin{cases}
A_0 = \dfrac{1}{24}\sum_{0}^{23} h_t, & A_1 = \dfrac{1}{12}\sum_{0}^{23} h_t \cos nt \\
B_1 = \dfrac{1}{12}\sum_{0}^{23} h_t \sin nt, & A_2 = \dfrac{1}{12}\sum_{0}^{23} h_t \cos 2nt \\
B_2 = \dfrac{1}{12}\sum_{0}^{23} h_t \sin 2nt \quad \text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

Da $n = 15°$ und t eine ganze Zahl ist, so müssen alle Cosinusse und Sinusse, welche in dieser Reihe vorkommen, einem der folgenden Sinusse gleich sein, nämlich $0 \pm \sin 15°$, $\pm \sin 30°$, $\pm \sin 45°$, $\pm \sin 60°$, $\pm \sin 75° \pm 1$, welche wir der Reihe nach mit $0 \pm S_1$, $\pm S_2$, $\pm S_3$, $\pm S_4$, $\pm S_5 \pm 1$ bezeichnen wollen.

B.

Ort: *Helgoland.* Anfangsdatum: 1882 Jan. 1 0^h p. m. $V_0 + u = 80{,}4272°$ für M_2. $= 127{,}0233°$ „ M_1.

Berechnung der Koëfficienten für die Tide: M.

I		II		III	IV	V	VI	M	VII	M	VIII	IX	M	X	M	XI
$2{,}0000^m +$		$2{,}0000^m +$		I + II	I — II	Untere Hälfte von IV in umgekehrter Reihenfolge	IV + V		M × VI		M × VI	IV — V		M × IX		M × IX
0^h	1,4384	12^h	1,4556	2,8940	— 0,0172	—	— 0,0172	0	0,0000	0	0,0000	— 0,0172	1	— 0,0172	1	— 0,0172
1	1,0358	13	1,0543	2,0901	— 185	— 103	— 288	S_1	— 75	S_3	— 204	— 82	S_5	— 79	S_3	— 58
2	0,7708	14	0,7786	1,5494	— 78	— 7	— 85	S_2	— 42	1	— 85	— 71	S_4	— 62	0	0
3	0,7124	15	0,7131	1,4255	— 7	— 93	— 100	S_3	— 71	S_3	— 71	+ 86	S_3	+ 61	$-S_3$	— 61
4	1,0006	16	0,9866	1,9872	+ 140	+ 17	+ 157	S_4	+ 136	0	0	+ 123	S_2	+ 62	−1	— 123
5	1,4965	17	1,5078	3,0043	— 113	+ 9	— 104	S_5	— 101	$-S_3$	+ 74	— 122	S_1	— 32	$-S_3$	+ 86
6	2,0295	18	2,0318	4,0613	— 23	—	— 23	1	— 23	−1	+ 23	— 23	0	0	0	0
7	2,4265	19	2,4256	4,8521	+ 9			12	— 0,0176	12	— 0,0263		12	— 0,0222	12	— 0,0328
8	2,6289	20	2,6272	5,2561	+ 17			B =	— 0,0015	B_3 =	— 0,0022		A_1 =	— 0,0018	A_3 =	— 0,0027
9	2,5678	21	2,5771	5,1449	— 93											
10	2,2889	22	2,2896	4,5785	— 7											
11	1,8810	23	1,8913	3,7723	— 103											

XII	XIII	XIV	XV	M	XVI	M	XVII	M	XVIII	M	XIX	XX	XXI	XXII	M	XXIII	M	XXIV	XXV	M	XXVI	M	XXVII
Erste Hälfte von III	Zweite Hälfte von III	XII + XIII	XII − XIII		M × XV		M × XV		M × XV		M × XV	Erste Hälfte von XIV	Zweite Hälfte von XIV	XX − XXI		M × XXII		M × XXII	XX + XXI		M × XXV		M × XXV
2,8940	4,0613	6,9553	−1,1673	0	0,0000	1	−1,1673	0	0,0000	1	−1,1673	6,9553	6,5704	+0,3849	0	0,0000	1	+0,3849	13,5257	0	0,0000	0	+13,5257
2,0901	4,8521	6,9422	−2,7620	S_2	— 1,3810	S_4	−2,3920	1	−2,7620	0	0	6,9422	6,5657	+0,3765	S_4	+0,3260	S_2	+0,1882	13,5079	S_4	+11,6982	$-S_2$	— 6,7540
1,5494	5,2561	6,8055	−3,7067	S_4	— 3,2101	S_2	−1,8534	0	0	−1	+3,7067	6,8055	6,7766	+0,0289	S_4	+0,0250	$-S_2$	−0,0144	13,5821	$-S_4$	−11,7624	$-S_2$	— 6,7910
1,4255	5,1449	6,5704	−3,7194	1	— 3,7194	0	0	−1	+3,7194	0	0			12		+0,3510	12	+0,5587		12	— 0,0642	12	— 0,0193
1,9872	4,5785	6,5657	−2,5913	S_4	— 2,2443	$-S_2$	+1,2956	0	0	1	−2,5913			B_4 =		+0,0292	A_4 =	+0,0466		B_8 =	— 0,0054	A_8 =	— 0,0016
3,0043	3,7723	6,7766	−0,7680	S_2	— 0,3840	$-S_4$	+0,6651	1	−0,7680	0	0												
	24	40,6157		12	−10,9388	12	−3,4520	12	+0,1894	12	+0,0519												
		1,6923		B_2 =	— 0,9116	A_2 =	−0,2877	B_6 =	+0,0158	A_6 =	+0,0043												
		2,0000																					
	A_0 =	3,6923																					

Auch sieht man leicht, dafs diejenigen h_{t_n} für welche nt, 2 nt, 3 nt ... 8 nt um Vielfache von 180° verschieden sind, denselben Multiplikator S mit entgegengesetztem oder gleichem Vorzeichen haben; wir können demnach die Multiplikation anstatt an jedem h einzeln, an der algebraischen Summe der mit demselben S zu multiplicirenden Wasserständen ausführen. So wird z. B.:

$$A_1 = \frac{1}{12}\,[(h_0 - h_{12}) + (h_1 - h_{13} - h_{11} + h_{23})\,S_5 + (h_2 - h_{14} - h_{10} + h_{22})\,S_4 + (h_3 - h_{15} - h_9 + h_{21})\,S_3 + (h_4 - h_{16} - h_8 + h_{20})\,S_2 + (h_5 - h_{17} - h_7 + h_{19})\,S_1 + (h_6 - h_{18})\,0]$$

$$B_1 = \frac{1}{12}\,[(h_0 - h_{12})\,0 + (h_1 - h_{13} + h_{11} - h_{23})\,S_1 + (h_2 - h_{14} + h_{10} - h_{22})\,S_2 + (h_3 - h_{15} + h_9 - h_{21})\,S_3 + (h_4 - h_{16} + h_8 - h_{20})\,S_4 + (h_5 - h_{17} + h_7 - h_{19})\,S_5 + (h_6 - h_{18})]$$

und analog für alle anderen Koëfficienten. Hieraus ergiebt sich ein höchst elegantes und bequemes Verfahren, die Koëfficienten $A_1 \ldots A_8$ und $B_1 \ldots B_8$ zu berechnen, welches an der Hand des nebenstehenden Schemas leicht zu verstehen ist. Dasselbe ist dem zuerst von Archibald Smith für die Berechnung der Deviation des Kompasses angewendeten Verfahren ganz analog. Durch eine Hülfstabelle, welche die Vielfachen von S_1, S_2, ... S_5 enthält, läfst sich die ganze Rechnung noch wesentlich erleichtern.

Als Beispiel geben wir die Berechnung der Koëfficienten für die M-Tide für *Helgoland*.

Das Schema bezieht sich auf die vollständige Berechnung der Koëfficienten der Haupt- und Nebentiden. Wo die letzteren wegfallen, brauchen natürlich nicht alle Rubriken ausgefüllt zu werden; wir haben zur Berechnung einer eintägigen Tide nur die Kolumnen I, II, III bis VII und IX, X und für eine halbtägige Tide die Kolumnen I, II, III, XII, XIII, XV, XVI und XVII zu benutzen und ähnlich für die Tiden mit andern Perioden, wie M K, M S u. s. w.

Wir wollen hier gleich bemerken, dafs die so gefundenen Koëfficienten A_1, B_1, A_2, B_2 u. s. w. wegen der Art wie die Mittelwerthe für die einzelnen Tidestunden erhalten werden, noch mit gewissen Faktoren multiplicirt werden müssen. Dies gilt für alle Tiden mit Ausnahme der S-Tiden, weil der Voraussetzung nach die Wasserstände für die mittleren Sonnenstunden gelten, welche mit den S-Stunden identisch sind. Diese Faktoren, welche „Vermehrungsfaktoren“ oder kurz „Vermehrung“ genannt werden mögen, werden wir später ableiten.

Die Berechnung von R, ζ, H und $\varkappa$ kann dann nach folgendem Schema geschehen, welches beispielshalber für M_2 ausgefüllt ist:

$B_2 = -0{,}9116$ Meter	$\log B_2 = 9{,}95980\,n$	$\log R = 9{,}98042$	
$A_2 = -0{,}2877$ „	$\log A_2 = 9{,}45894\,n$	log Vermehrung $= 0{,}00498$	
	$\log \operatorname{tg} \zeta_2 = 0{,}50086$	$\log R_2 = 9{,}98540$	
	$\log \sin \zeta_2 = 9{,}97938\,n$	$\log 1/f = 9{,}99128$	
	$\log \cos \zeta_2 = 9{,}47852\,n$	$\log H_2 = 9{,}97668$	
	$\zeta_2 = 252{,}4842^\circ$		
	$V_0 + u = 80{,}4272^\circ$	$R_2 = 0{,}9669$ Meter	
	$\varkappa_2 = 332{,}9114^\circ$	$H_2 = 0{,}9477$ Meter	

Wir kommen nun zu dem, für die praktische Ausführung wichtigsten Punkt, nämlich in welcher Weise die Beobachtungen gruppirt werden müssen, um 24 Mittelwerthe für die einzelnen Tidestunden zu erhalten, die nur eine Art von Tide enthalten. Dieser Punkt wird in Darwin's Abhandlung nur in soweit behandelt, als das Verfahren im Allgemeinen beschrieben wird, für die praktische Ausführung aber auf die in England gebrauchten gedruckten Schemata verwiesen wird, welche für jede Tide besonders hergestellt sind. Verfasser dieses hat es vorgezogen, gewisse Formeln aufzustellen und danach Tabellen zu entwerfen, aus welchen die Daten zu entnehmen sind, wie die Wasserstände für jede Tide besonders in Schemata, die für alle Tiden anwendbar sind, gruppirt werden müssen. Es macht dies allerdings etwas mehr Mühe, weil die Vorbereitung der Schemata für jeden Ort und für jeden neu bearbeiteten Zeitraum von Neuem zu geschehen hat, und es möchte scheinen, als ob die Gefahr eines Irrthums eine nicht unbedeutende sei, indefs sind die Kontrolen

so gut, dafs bei einiger Aufmerksamkeit ein Irrthum fast ausgeschlossen ist. Zugleich wird hierdurch der Vortheil erreicht, dafs mit Hilfe der unten mitzutheilenden Formeln Jeder, der sich mit der Ausführung der harmonischen Analyse der Gezeiten befassen will, in den Stand gesetzt wird, sich die Tabellen in der Form, wie die nachher als Beispiel mitgetheilte, selbst zu entwerfen und die Bearbeitung von Gezeitenbeobachtungen vorzunehmen, ohne erst auf schwer zugängliche Quellen zurückgehen zu müssen.

Die Aufgabe ist folgende. Es sind gegeben die Wasserstände für jede mittlere Sonnenstunde (S-Stunde) während eines gewissen Zeitraums (nahe ein Jahr) — gesucht wird der Wasserstand für jede der 24 Tidestunden einer bestimmten Tide.

Jeder einzelne Wasserstand setzt sich zusammen aus der Summe der allen einzelnen Tiden für die betreffende S-Stunde zukommenden Höhen wie sie nach den Gleichungen (25) bis (30) u. s. w. berechnet werden können, sobald die numerischen Werthe der Koëfficienten bekannt sind. Eine einzelne Periode einer bestimmten Tide würde demnach nicht ausreichen, den Verlauf dieser Tide zu geben, weil in dieser Zeit der Einfluſs der andern Tiden nicht verschwindet. Wird aber eine grofse Anzahl von Perioden zusammengefafst, so werden, da die Perioden der andern Tiden von der der gesuchten verschieden sind, in den Mittelwerthen die andern Tiden um so vollständiger verschwinden, je gröfser die Zahl der benutzten Perioden ist, und wir behalten im Mittelwerthe nur den Verlauf der gesuchten Tide während einer Periode zurück, welche wir dann der oben auseinandergesetzten Behandlung unterwerfen können, um die Koëfficienten A_1, B_1, A_2, B_2 u. s. w. zu erhalten.

Indem wir nun das Verfahren der Gruppirung beschreiben wollen, glauben wir, dafs es sich am besten an einem bestimmten Beispiel, unter Bezugnahme auf das beifolgend gegebene Bruchstück eines Schemas wird klar machen lassen, und setzen daher voraus, dafs es unsere Absicht ist, die M-Tiden abzuleiten.

Wir haben dann die für S-Stunden geltenden Wasserstände so zusammen zu fassen, dafs die Mittelwerthe für die vollen M-Stunden gelten.

In einer Stunde mittlerer Sonnenzeit ändert sich das Argument der S-Tiden um $\gamma - \eta = 15°$, das der M-Tiden um $\gamma - \sigma = 14°{,}4920521$, also ist

$$1\text{ M-Stunde} = \frac{\gamma - \eta}{\gamma - \sigma} = 1{,}03505\text{ S-Stunden}$$

oder eine Periode der M-Tiden = 24,84120 mittlere Sonnen- oder S-Stunden.

Wir nehmen nun ein Schema (siehe S. 509), welches 24 Vertikal-Kolumnen enthält, die mit 0^h, 1^h, 2^h . . . 23^h überschrieben sind und von denen jede eine der 24 Tide-Stunden bezeichnet. Aufserdem sind eine beliebige Anzahl von Horizontalreihen[1]) vorhanden, die mit laufenden Nummern versehen werden und die daher die Nummern der successiven Perioden der Tide oder die Tide-Tage für unser Beispiel, also M-Tage, angeben. Wir beginnen damit, die successive für 0^h, 1^h, 2^h . . . S-Zeit des ersten Tages geltenden Wasserstände in die ebenso überschriebenen Spalten der ersten Horizontalreihe einzutragen. Indem wir dies thun, begehen wir einen stetig wachsenden Fehler, denn 1^h M-Zeit ist $= 1{,}03505^h$ S-Zeit, 2^h M-Zeit $= 2{,}07010^h$ S-Zeit u. s. f. Die in diesen Rubriken eingetragenen Wasserstände gelten also nicht streng für die überschriebenen Stunden, sondern für immer frühere Zeiten, und es ist nothwendig, von Zeit zu Zeit ein Korrektiv anzuwenden, um den Fehler wieder auszugleichen. Wir fahren fort, die Wasserstände kontinuirlich in die Rubriken für die gleichlautenden M-Stunden einzutragen bis zu 14^h M-Zeit, wo der Fehler auf nahe eine halbe Stunde angewachsen ist, denn 14^h M-Zeit $= 14{,}49070^h$ S-Zeit. Wir wenden nun das Korrektiv an, indem wir den für 15^h S-Zeit geltenden Wasserstand zunächst ganz fallen lassen und in die Kolumme 15^h den um 16^h S-Zeit beobachteten Wasserstand eintragen. Hierdurch begehen wir einen Fehler von nahe einer halben Stunde in entgegengesetzter Richtung, denn 15^h M-Zeit $= 15{,}52575^h$ S-Zeit; während also der in 14^h eingetragene Wasserstand für eine

[1]) In dem für die Reduktion der Beobachtungen an der deutschen Küste entworfenen Schema sind 37 Horizontalreihen auf jeder Seite, es werden demnach pro Tide für ein Jahr etwa 10 Seiten gebraucht. S. Schema C, welches beispielshalber für die Tide M vorbereitet ist.

C.

Datum des Anfangs:
Ort:

$V_0 + u =$
Bezeichnung der Tide: M.

No. 1.

r	0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h	13h	14h	15h	16h	17h	18h	19h	20h	21h	22h	23h	Mittl. Sonnenzeit für die Rubrik 23h
																									d h
1															:									:	2 0
2																			:				:		3 1
3																							:	:	4 2
4																						:			5 2
5				:																	:				6 3
6									:											:					7 4
7													:						:						8 5
				u. s. w.									u. s. w.								u. s. w.				
32													:								:				34 2
33																	:				:				35 3
34																					:	:			36 4
35																				:					37 4
36		:																	:						38 5
37							:											:							39 6
Sa.																									
Anzahl																									

um eine halbe Stunde zurückliegende Zeit gilt, so gilt die in Kolumne 15^h eingetragene Beobachtung für eine S-Zeit, die eine halbe Stunde voraus liegt. Indem wir nun die Eintragungen kontinuirlich fortsetzen, vermindert sich der Fehler, bis nach etwa 14 Stunden die M- und S-Stunde zusammenfallen, worauf der Fehler wieder in entgegengesetzter Richtung wächst, bis nahe 28 M-Stunden (genauer 28,5307) nach der ersten Korrektion die in S-Zeit verwandelte M-Stunde wieder um nahe eine halbe Stunde der vollen Stunde der Beobachtung vorausgeeilt ist. Nun wird wieder das Korrektiv, wie in Kolumne 14^h, angewendet und die Beobachtung, welche bei kontinuirlicher Fortsetzung der Eintragung eigentlich in die auf $14^h+28^h = 42^h$ oder in der zweiten Horizontalreihe in Kolumne 18^h folgenden Spalte eingetragen werden sollte, weggelassen, dagegen die dann folgende in dieselbe hineingeschrieben. Hierdurch wird wieder ein Fehler von nahe einer halben Stunde in entgegengesetzter Richtung gemacht, und wir setzen nun die kontinuirliche Eintragung fort, bis nach 28,5307 M-Stunden wieder eine Beobachtung weggelassen wird u. s. f. bis zum Schlufs der Beobachtungsreihe.

Anstatt jedesmal nach 28,5307 M-Stunden eine Beobachtung unberücksichtigt zu lassen, ist es genauer, diese mit der nächst vorhergehenden in dieselbe Rubrik einzutragen, ein Verfahren, welches sich auch aus praktischen Rücksichten empfiehlt, weil es eine kontinuirliche Eintragung sämmtlicher beobachteten Wasserstände gestattet. Um diese bequem und sicher ausführen zu können, ist es zweckmäfsig, vorher in den Schematen (etwa durch zwei über einander stehende Punkte) die Stunden zu bezeichnen, in welchen zwei Beobachtungen eingetragen werden sollen, und es wird sich noch darum handeln, Regeln zu ermitteln, durch welche man bequem vorher bestimmen kann, in welcher M-Stunde irgend einer Horizontalreihe das Korrektiv angewendet werden mufs.

Hierbei müssen zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem die Periode der Tide gröfser oder kleiner als 24^h ist.

1. Periode der Tide gröfser als 24^h.

Korrektiv: Eintragung zweier Beobachtungen in dieselbe Rubrik, kurz als Doppeleintrag bezeichnet.

Ist ι die Aenderung des Arguments der Tide in einer Stunde mittlerer Sonnenzeit in Graden, wie sie aus der Tabelle A auf S. 501 ff. entnommen werden kann, so ist

$$\text{eine Tidestunde} = \frac{15^\circ}{\iota} \text{ S-Stunden}$$

und die Periode der Tide

$$t = \frac{15}{\iota}\, 24^h \text{ S-Stunden.}$$

Bezeichnen wir mit p die Anzahl Tidestunden, welche $= (p+1)$ S-Stunden sind, so ist:

$$p + 1 = p\frac{15}{\iota} = p\frac{t}{24}$$

woraus:

$$p = \frac{24^h}{t - 24^h} \text{ Tide-Stunden.}$$

Dann haben die successiven Doppeleintragungen

$$\begin{aligned}
&\text{die erste:} && 0 + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p && \text{Tide-Stunden,}\\
&\text{„ zweite:} && p + \frac{1}{2}p = \frac{3}{2}p && \text{„}\\
&\text{„ dritte:} && 2p + \frac{1}{2}p = \frac{5}{2}p && \text{„}\\
&\quad\vdots && \quad\vdots && \quad\vdots\\
&\text{„ } (n+1)^{te}\text{:} && np + \frac{1}{2}p = \left(n + \frac{1}{2}\right)p && \text{„}
\end{aligned}$$

nach der Anfangsepoche zu erfolgen. Ist nun $24\,(r-1)$ dasjenige Vielfache von 24 Tidestunden, welches zunächst kleiner ist als $(n+{}^1/_2)\,p$, so hat die $(n+1)^{te}$ Doppeleintragung:

$$(r-1)\text{ Tidetage }+\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)p-(r-1)\,24^h\right\}\text{ Tidestunden}$$

nach der Anfangsepoche zu erfolgen, d. h. dieselbe hat in der r^{ten} Horizontalreihe in der durch den zweiten Theil der Formel gegebenen Tidestunde zu geschehen. Die letzte mögliche Doppeleintragung in der r^{ten} Horizontalreihe würde die in 23^h sein, d. h. 24 Stunden nach dem Ende des $(r-1)^{ten}$ Tidetages; um daher zu erfahren, wie viele Doppeleintragungen bis zum Schlufs des r^{ten} Tidetages stattfinden müssen, haben wir zu setzen:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)p-(r-1)\,24^h=24^h$$

oder

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)p=r\,24^h$$

woraus sich ergiebt:

$$n=r.\frac{24^h}{p}-0{,}5$$
$$=r\,(t-24^h)-0{,}5$$

Da n nur eine ganze Zahl sein kann, so sind etwaige Bruchtheile auf der rechten Seite wegzuwerfen. Dieser Werth von n ist in dem zweiten Theil der obigen Formel einzusetzen, um die Tidestunde zu erhalten, zu welcher der Doppeleintrag gemacht werden soll.

Wenn zwei auf einander folgende r dasselbe n ergeben, so findet in der zweiten Zeile kein Doppeleintrag statt. Sind die für zwei auf einander folgende r sich ergebenden n um mehrere Einheiten verschieden, so sind in derselben Zeile mehrere Doppeleintragungen zu machen, zu deren näherer Bestimmung die zwischenliegenden n zu ergänzen sind.

Die Kenntnifs der Gröfse n giebt aufserdem eine sehr werthvolle Kontrole für die Richtigkeit der Eintragungen ab, denn da $n+1$ die Anzahl Stunden angiebt, um welche sich die S-Zeit gegen die Tidezeit bis zum Ende des r^{ten} Tages verschoben hat, so wird offenbar in die letzte Rubrik (23^h) dieser Horizontalreihe die Beobachtung einzutragen sein, welche zu der S-Zeit:

$$r^d+23^h+(n+1)^h=(r+1)^d+n^h$$

gemacht worden ist, wobei natürlich die ganzen Vielfache von 24^h, welche in n enthalten sind, zu $(r+1)^d$ hinzuzuzählen sind. Wird daher in den Schematen in einer besonderen Spalte angegeben, welche S-Zeit der Kolumne 23^h entspricht, so hat man dadurch bei der Eintragung der Beobachtungen für jede Zeile eine Kontrole, die man noch dadurch vermehren kann, dafs in jeder Zeile durch einen dickeren kurzen Vertikalstrich das Ende des bürgerlichen Tages bezeichnet wird.

Es möge noch bemerkt werden, dafs sich bei Vorbereitung der Schemata durch Eintragung der Zeichen für den Doppeleintrag und für das Ende des bürgerlichen Tages für das Auge eine Kontrole dadurch ergiebt, dafs die ersteren in von links nach rechts, die letzteren in von rechts nach links geneigten Linien liegen, in welchen Unregelmäfsigkeiten, die durch falsche Stellung der Marken entstanden sind, leicht erkennbar sind.

2. Periode der Tide kleiner als 24^h.

Korrektiv: Unterlassung der Eintragung in der betreffenden M-Stunde, kurz als „Lücke“ bezeichnet und in den Schematen durch einen kurzen horizontalen Strich markirt.

Durch ähnliche Betrachtungen wie oben überzeugt man sich leicht, dafs in dem Falle, wo eine Tidestunde kleiner als eine Stunde mittlerer Sonnenzeit ist, der bei kontinuirlicher Eintragung der Beobachtung gemachte Fehler successive dadurch wieder ausgeglichen wird, dafs man jedesmal nach Verlauf von p'-Tidestunden eine Tidestunde offen läfst.

Hier bedeutet p' die Anzahl Tidestunden, welche $= (p'-1)$ S-Stunden sind, daher:

$$p'-1 = p'\frac{15}{\iota} = p'\frac{t}{24}$$

woraus:

$$p' = \frac{24^h}{24^h - t} \text{ Tidestunden.}$$

In gleicher Weise wie vorhin finden wir:

$$n' = r(24^h - t) - 0{,}5$$

und die Tidestunde, wo eine Lücke gelassen werden soll,

$$= \left(n' + \frac{1}{2}\right) p' - (r-1)\,24^h$$

und zur Kontrole die mittlere Sonnenzeit der Rubrik $23^h = r^d + 23^h - (n'+1)^h = r^d + (22 - n')^h$.

Die vorhin gemachten Bemerkungen bezüglich des Wegwerfens der Bruchtheile, der Gleichheit von n für 2 auf einander folgende r, oder ihrer Verschiedenheit um mehrere Einheiten gelten auch hier.

Stellen wir die Formeln nochmals zusammen und bezeichnen mit (h) und (h') resp. die Tidestunde, wo ein Doppeleintrag oder eine Lücke als Korrektiv angewendet werden soll, so ist:

(62)

1. $t > 24^h$ — Doppeleintrag in Zeile r	2. $t < 24^h$ – Lücke in Zeile r
$t = \frac{15}{\iota} \times 24^h$	$t = \frac{15}{\iota} \times 24^h$
$p = \frac{24^h}{t - 24^h}$	$p' = \frac{24^h}{24^h - t}$
$n = r(t - 24^h) - 0{,}5$	$n' = r(24^h - t) - 0{,}5$
$(h) = \left(n + \frac{1}{2}\right) p - (r-1)\,24^h$	$(h') = \left(n' + \frac{1}{2}\right) p' - (r-1)\,24^h$
S-Zeit der Rubrik $23^h = (r+1)^d + n^h$	S-Zeit der Rubrik $23^h = r^d + (22 - n')^h$

In den Formeln für n und (h), sowie für n' und (h') sind die vorkommenden Bruchtheile wegzuwerfen.

Für die S-Tiden, für welche $t = 24^h$, bedarf es keines Korrektivs, da die Beobachtungen zu vollen Tidestunden gemacht sind.

Werden z. B. die M-Tiden gesucht und wollen wir wissen, in welcher Stunde in der 68sten Zeile ein Doppeleintrag gemacht werden soll, so haben wir da $t = 24{,}84120^h : p = 28{,}5307^h$ und für $r = 68 : n = 57{,}2016 - 0{,}5 = 56{,}7016 = 56$, da wir die Bruchtheile wegzuwerfen haben. Mit $n = 56$ ergiebt sich $(h) = 56{,}5 \times 28{,}5307 - 67 \times 24 = 3{,}9845^h = 3^h$, da wieder die Bruchtheile wegfallen. Wir haben demnach in der 68sten Zeile in der mit 3^h überschriebenen Kolumne zwei Beobachtungen und in die Kolumne 23^h die am 69sten Tage $+ 56^h$ oder am 71sten bürgerlichen Tage um 8^h gemachte Beobachtung einzutragen, welche letztere Angabe als Kontrole für die richtige Eintragung dient.

Für diejenigen Tiden, deren Ableitung in weitaus der Mehrzahl der Fälle genügt, folgen hier die numerischen Werthe zur Benutzung der Formeln (62):

(63)

Korrektiv:	Tide	t (h)	n	(h)
Doppeleintrag	M	24,84120	$n = r \times 0{,}84120 - 0{,}5$	$(h) = (n + \frac{1}{2})$ $28{,}5307^h - (r-1)\,24^h$
Lücke	K	23,93447	$n = r \times 0{,}06553 - 0{,}5$	$(h') = (n + \frac{1}{2})$ $366{,}2442^h - (r-1)\,24^h$
Doppeleintrag	O	25,81935	$n = r \times 1{,}81935 - 0{,}5$	$(h) = (n + \frac{1}{2})$ $13{,}1915^h - (r-1)\,24^h$
do.	N	25,31670	$n = r \times 1{,}31670 - 0{,}5$	$(h) = (n + \frac{1}{2})$ $18{,}2274^h - (r-1)\,24^h$
do.	P	24,06584	$n = r \times 0{,}06584 - 0{,}5$	$(h) = (n + \frac{1}{2})$ $364{,}5200^h - (r-1)\,24^h$
do.	Q	26,86836	$n = r \times 2{,}86836 - 0{,}5$	$(h) = (n + \frac{1}{2})$ $8{,}3671^h - (r-1)\,24^h$
do.	ν	25,25201	$n = r \times 1{,}25201 - 0{,}5$	$(h) = (n + \frac{1}{2})$ $19{,}1692^h - (r-1)\,24^h$
Lücke	J	23,09847	$n = r \times 0{,}90153 - 0{,}5$	$(h') = (n + \frac{1}{2})$ $26{,}6214^h - (r-1)\,24^h$
Doppeleintrag	L	24,38324	$n = r \times 0{,}38324 - 0{,}5$	$(h) = (n + \frac{1}{2})$ $62{,}6239^h - (r-1)\,24^h$
do.	T	24,03290	$n = r \times 0{,}03290 - 0{,}5$	$(h) = (n + \frac{1}{2})$ $729{,}4700^h - (r-1)\,24^h$
do.	MK	24,53142	$n = r \times 0{,}53142 - 0{,}5$	$(h) = (n + \frac{1}{2})$ $45{,}1620^h - (r-1)\,24^h$
do.	MS	24,41335	$n = r \times 0{,}41335 - 0{,}5$	$(h) = (n + \frac{1}{2})$ $58{,}0621^h - (r-1)\,24^h$
do.	μ oder 2MS	25,74352	$n = r \times 1{,}74352 - 0{,}5$	$(h) = (n + \frac{1}{2})$ $13{,}7653^h - (r-1)\,24^h$
Lücke	SK	23,97812	$n = r \times 0{,}02188 - 0{,}5$	$(h') = (n + \frac{1}{2})$ $1096{,}6917^h - (r-1)\,24^h$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man sich leicht ein für alle Mal Tabellen nach Art des hier folgenden Beispiels entwerfen, welche die für die richtige Gruppirung der Beobachtungen zur Ableitung einer bestimmten Tide und zur Kontrole der richtigen Eintragung nothwendigen Daten ergeben.

Tide M.

r	n	(h)	r	n	(h)	r	n	(h)	r	n	(h)	r	n	(h)	r	n	(h)
		h			h			h			h			h			h
1	0	14	21	17	19	41	33	—	61	50	0	81	67	5	101	84	10
2	1	18	22	18	23	42	34	0	62	51	5	82	68	10	102	85	15
3	2	23	23	18	—	43	35	4	63	52	9	83	69	14	103	86	19
4	2	—	24	19	4	44	36	9	64	53	14	84	70	19	104	86	—
5	3	3	25	20	8	45	37	13	65	54	18	85	71	23	105	87	0
6	4	8	26	21	13	46	38	18	66	55	23	86	71	—	106	88	4
7	5	12	27	22	17	47	39	22	67	55	—	87	72	4	107	89	9
8	6	17	28	23	22	48	39	—	68	56	3	88	73	9	108	90	14
9	7	21	29	23	—	49	40	3	69	57	8	89	74	13	109	91	18
10	7	—	30	24	3	50	41	8	70	58	13	90	75	18	110	92	23
11	8	2	31	25	7	51	42	12	71	59	17	91	76	22	111	92	—
12	9	7	32	26	12	52	43	17	72	60	22	92	76	—	112	93	3
13	10	11	33	27	16	53	44	21	73	60	—	93	77	3	113	94	8
14	11	16	34	28	21	54	44	—	74	61	2	94	78	7	114	95	12
15	12	20	35	28	—	55	45	2	75	62	7	95	79	12	115	96	17
16	12	—	36	29	1	56	46	6	76	63	11	96	80	16	116	97	21
17	13	1	37	30	6	57	47	11	77	64	16	97	81	21	117	97	—
18	14	5	38	31	10	58	48	15	78	65	20	98	81	—			
19	15	10	39	32	15	59	49	20	79	65	—	99	82	1			
20	16	14	40	33	19	60	49	—	80	66	1	100	83	6	u. s. w.		

Wenn wir das im Vorhergehenden beschriebene Verfahren, die 24 Mittelwerthe für eine bestimmte Tide zu bilden, näher betrachten, so sehen wir, dafs wir nicht die Höhe der Tide zu der in der Ueberschrift angegebenen Tidestunde erhalten, sondern das Mittel aus der Höhe der Tide zu allen Zeiten während eines Zeitraums von einer halben Stunde vor und nach der vollen Tidestunde. Beide Werthe können nicht unwesentlich von einander verschieden sein, und es sind daher Verbesserungen anzubringen, wodurch die aus den zuletzt genannten Mittelwerthen erhaltenen Resultate auf die wahren Werthe reducirt werden, welche man aus den streng für die volle Tidestunde geltenden Höhen erhalten würde. Diese Korrektionen findet man auf folgende Weise.

Es sei die Höhe der Tide zu einer gewissen durch $\Theta = \alpha t$ gegebenen Zeit:

$$(a) \qquad h_t = A_0 + A_1 \cos\Theta + A_2 \cos 2\Theta + \ldots + A_r \cos r\Theta + \ldots + B_1 \sin\Theta + B_2 \sin 2\Theta + \ldots + B_r \sin r\Theta + \ldots$$

worin wir die allgemeinen Glieder durch $A_r \cos r\Theta$ und $B_r \sin r\Theta$ bezeichnen.

Wird diese Reihe zwischen den Grenzen $\Theta - {}^1/_2\alpha$ und $\Theta + {}^1/_2\alpha$ integrirt, so erhalten wir für die allgemeinen Glieder:

$$\int_{\Theta-\frac{1}{2}\alpha}^{\Theta+\frac{1}{2}\alpha} A_r \cos r\Theta d\Theta = \frac{1}{r} A_r \left\{\sin r\left(\Theta + \frac{1}{2}\alpha\right) - \sin r\left(\Theta - \frac{1}{2}\alpha\right)\right\} = \frac{2}{r} A_r \sin\frac{1}{2} r\alpha \cos r\Theta$$

$$\int_{\Theta-\frac{1}{2}\alpha}^{\Theta+\frac{1}{2}\alpha} B_r \sin r\Theta d\Theta = \frac{1}{r} B_r \left\{\cos r\left(\Theta - \frac{1}{2}\alpha\right) - \cos r\left(\Theta + \frac{1}{2}\alpha\right)\right\} = \frac{2}{r} B_r \sin\frac{1}{2} r\alpha \sin r\Theta$$

und wenn dies durch das Intervall der Grenzen oder durch α dividirt wird, so sind die Mittel aller zwischen $\Theta - {}^1/_2\alpha$ und $\Theta + {}^1/_2\alpha$ vorkommenden Werthe von $A_r \cos r\Theta$ und $B_r \sin r\Theta$

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} = \frac{2}{r\alpha} A_r \sin\frac{1}{2} r\alpha \,.\, \cos r\Theta = A'_r \cos r\Theta \\ \text{und} \\ = \frac{2}{r\alpha} B_r \sin\frac{1}{2} r\alpha \,.\, \sin r\Theta = B'_r \sin r\Theta \end{array} \right.$$

Setzen wir successive r = 0, 1, 2, 3 . . . so erhalten wir eine zweite Reihe von derselben Form wie die ursprüngliche, nämlich:

$$(c) \qquad \begin{aligned} h'_t = {} & A_0 + A'_1 \cos\Theta + A'_2 \cos 2\Theta + \ldots\ldots + A'_r \cos r\Theta + \ldots \\ & + B'_1 \sin\Theta + B'_2 \sin 2\Theta + \ldots\ldots + B'_r \sin r\Theta + \ldots \end{aligned}$$

durch welche der Mittelwerth aller zwischen $\Theta - {}^1/_2\alpha$ und $\Theta + {}^1/_2\alpha$ vorkommenden Höhen der betreffenden Tide dargestellt wird.

Die Koëfficienten der ersten Reihe (a) lassen sich, wie sich aus dem Ausdruck (b) ergiebt, aus den Koëfficienten der Reihe (c) ableiten, indem man:

$$(64) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} A_0 & \text{mit} & 1 \\ A'_1 \text{ und } B'_1 & \text{„} & \dfrac{\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} \\ A'_2 \text{ „ } B'_2 & \text{„} & \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 2\alpha}{\sin\frac{1}{2}\cdot 2\alpha} \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ A'_r \text{ „ } B'_r & \text{„} & \dfrac{\frac{1}{2} r\alpha}{\sin\frac{1}{2} r\alpha} \end{array} \right.$$

multiplicirt.

Die Art und Weise, wie wir die Mittelwerthe gebildet haben, zeigt, wie schon gesagt, dafs dieselben nicht streng die zu der vollen Stunde, mit welcher die Vertikal-Kolumne überschrieben ist, gehörenden Höhen der betreffenden Tide ergeben, sondern die Mittel aus allen Wasserständen sind, die eine halbe Stunde vor und eine halbe Stunde nach der vollen Stunde auftreten. Je zahlreicher die Beobachtungen sind, welche in der Kolumne vorkommen, desto genauer wird ihr Mittel dem Mittelwerthe des Integrals des Wasserstandes, ausgedehnt über eine halbe Stunde vor und nach der vollen Stunde, gleich sein. Indem wir demnach Gleichung (59) auf die so erhaltenen Mittelwerthe anwenden, erhalten wir nicht die wahren Koëfficienten der Reihe (a), sondern die Koëfficienten der Reihe (c), aus denen die ersteren mit Hülfe der Faktoren (64) abgeleitet werden können.

Das Verfahren, wie es im Vorhergehenden dargestellt worden ist, basirt auf der Voraussetzung, dafs die Mittel von Stunde zu Stunde gebildet werden; wir haben also $\alpha = n = 15°$ zu setzen. Natürlich mufs im Zähler der Faktoren (64) α in Theilen des Radius ausgedrückt sein, d. h. wir haben $\alpha = \frac{15°.\pi}{180°} = \frac{\pi}{12}$ zu setzen. Um die wahren Koëfficienten für die Tiden zu erhalten, haben wir demnach die durch Anwendung des Schema B erhaltenen Koëfficienten mit folgenden Faktoren zu multipliciren, welche wir als „Vermehrungsfaktoren“ oder kurz als „Vermehrung“ bezeichnen wollen, da sie alle gröfser als 1 sind, nämlich:

$$(65) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} & & \text{Vermehrungsfaktor} & \text{Logarithmus} \\ A_1 \text{ und } B_1 \text{ oder } R_1: & \dfrac{\pi}{24 \sin 7° 30'} = & 1{,}00286 & 0{,}001240 \\ A_2 \text{ „ } B_2 \text{ „ } R_2: & \dfrac{\pi}{12 \sin 15° 0'} = & 1{,}01152 & 0{,}004975 \\ A_3 \text{ „ } B_3 \text{ „ } R_3: & \dfrac{\pi}{8 \sin 22° 30'} = & 1{,}02617 & 0{,}011219 \\ A_4 \text{ „ } B_4 \text{ „ } R_4: & \dfrac{\pi}{6 \sin 30° 0'} = & 1{,}04720 & 0{,}020030 \\ A_6 \text{ „ } B_6 \text{ „ } R_6: & \dfrac{\pi}{4 \sin 45° 0'} = & 1{,}11072 & 0{,}045605 \\ A_8 \text{ „ } B_8 \text{ „ } R_8: & \dfrac{\pi}{3 \sin 60° 0'} = & 1{,}20920 & 0{,}082498 \end{array} \right.$$

Diese Faktoren sind bei allen Tiden anzuwenden mit Ausnahme der S-Tiden, weil die unmittelbar beobachteten Wasserstände für die vollen S-Stunden gelten, wir also die Reihe (a) und damit ohne Weiteres die wahren Koëfficienten der Tide erhalten.

Es erübrigt noch, ein Paar Worte über die Wahl der Länge des zu untersuchenden Zeitraums zu sagen. Wir haben mehrfach hervorgehoben, dafs in den Mittelwerthen, wie sie nach dem im Vorhergehenden beschriebenen Verfahren gebildet werden, der Einfluſs aller Tiden, mit Ausnahme der gesuchten, verschwindet, wenn nur der Zeitraum, über den sich die Beobachtungen erstrecken, hinreichend grofs ist. Da aber die Perioden der Tiden unter sich inkommensurabel sind, so wird man durch die Wahl eines bestimmten Zeitraums immer nur eine Tide vollständig ausschliefsen können, die andern werden immer einen, wenn auch kleinen Einfluſs behalten, der um so geringer ist, je gröfser die Anzahl von Beobachtungen ist, die zur Bildung des Mittels verwendet werden. Es leuchtet wohl ohne Weiteres ein, dafs der Einfluſs einer zu eliminirenden Tide in der Summe der Beobachtungen, die in irgend einer Vertikal-Kolumne enthalten sind, höchstens mit dem einfachen Betrage ihres Koëfficienten sich geltend machen kann, und das Mittel für diese Kolumne daher nur um den durch die Anzahl der zum Mittel vereinigten Beobachtungen gegebenen Bruchtheil dieses Koëfficienten fehlerhaft werden kann. Ist z. B. der Koëfficient einer der zu eliminirenden Tiden = 1 m und die Anzahl der Beobachtungen in einer Vertikalkolumne 370, so kann das Mittel höchstens um $^1/_{370}$ = 0,0027 m fehlerhaft werden. Wählt man daher den zu bearbeitenden Zeitraum so, dafs die gröfste Tide ganz eliminirt wird, so wird man den etwa infolge der kleineren Tiden noch übrigen Fehler vernachlässigen oder mit anderen Worten dieselben ebenfalls als eliminirt ansehen können.

Im Allgemeinen ist die Tide M_2 diejenige, welche am gröfsten ist, und es sind daher die zu bearbeitenden Zeiträume so gewählt worden, dafs diese Tide überall als ganz eliminirt anzusehen ist, was dadurch geschieht, dafs man den Beobachtungszeitraum über eine ganze Zahl von Perioden der Tide M_2 sich erstrecken läfst.

Betrachten wir 2 Tiden, so ist die Höhe des Wassers:

$$= A_1 \cos n_1 t + B_1 \sin n_1 t + A_2 \cos n_2 t + B_2 \sin n_2 t$$

worin n_1 nahe = n_2 sein möge. Wünschen wir die n_2-Tide zu eliminiren, so können wir dies schreiben:

$$= \left\{A_1 + A_2 \cos (n_1 - n_2)t - B_2 \sin (n_1 - n_2)t\right\} \cos n_1 t$$
$$+ \left\{B_1 + A_2 \sin (n_1 - n_2)t + B_2 \cos (n_1 - n_2)t\right\} \sin n_1 t$$

d. h. wir können annehmen, dafs die Tide mit dem Argument $n_1 t$ oscillirt, aber eine etwas veränderliche Amplitude hat. Da wir A_1 und B_1 suchen, so werden wir diese offenbar nach Gleichung (60) dann von A_2 und B_2 frei finden, wenn wir den Beobachtungszeitraum so wählen, dafs derselbe gleich einem ganzen Vielfachen von $\frac{2\pi}{n_1 - n_2}$ ist.

Der Zeitraum für die Beobachtungen ist nun so gewählt, dafs der Einfluſs der Haupt-Sonnentide S_2 auf die Haupt-Mondtide M_2 und der Einfluſs der letzteren auf alle andern Tiden ein Minimum wird.

Auf diese Weise ist bei den Gezeiten-Reduktionen in England das Beobachtungs-Intervall für fast alle Tiden auf 369 Tage 3 Stunden mittlerer Sonnenzeit festgesetzt worden, mit Ausnahme der Tiden J und Q, für welche $370^d\ 10^h$ und der Tiden L, N und λ, ν, für welche aufser $369^d\ 3^h$ auch resp. $358^d\ 5^h$ und $349^d\ 22^h$ angenommen worden sind.

Uebrigens hat diese ganze Bestimmung, wie schon erwähnt, nur geringe Bedeutung, sobald der Beobachtungszeitraum nur annähernd ein Jahr beträgt; es wird aber des genauen Anschlusses an die vorhandenen in England ausgeführten zahlreichen Untersuchungen wegen beabsichtigt, auch für die Bearbeitung des an der deutschen Küste gesammelten Materials dieselben Perioden zu gebrauchen.

Sind in dem Beobachtungsmaterial Lücken vorhanden, so haben dieselben im allgemeinen keine grofse Bedeutung, es dürfte sich aber doch empfehlen,

dieselben auf ganze Vielfache der Periode von M_2 ($12{,}4206^h$) abzurunden. Ist beispielsweise irgendwo eine Lücke von 40^h vorhanden, so wird es gut sein, auch noch die nächsten 10 (oder die 5 der Lücke vorhergehenden und die 5 ihr folgenden) Beobachtungen wegzulassen, weil 50 Stunden annähernd gleich 4 Perioden der M_2-Tide sind.

Ist, wie das häufig vorkommt, das Beobachtungsmaterial nur für einen kurzen Zeitraum gegeben, so mufs das im Vorhergehenden geschilderte Verfahren modificirt werden. In welcher Weise dies am besten geschieht, hängt sehr von der Form, in der das Material gegeben ist (ob als registrirte Wasserstands-Kurven oder als Ablesungen des Wasserstandes in bestimmten Zeitintervallen), und von der Länge des Zeitraums, über welchen sich die Beobachtungen erstrecken, ab, sodafs wir uns jetzt nicht damit aufhalten und die Darstellung der Bearbeitung eines speciellen Falles überlassen wollen.

§ 9.

Numerische Ausführung der harmonischen Analyse für die Tiden von langer Periode.

Am Schlufs von § 2 wurde bereits gesagt, dafs die Tiden von längerer Periode, weil sie sich im Laufe eines Tages nur wenig ändern, aufgefafst werden können als Schwankungen des mittleren Wasserstandes, welche sich erst nach längerer Zeit wieder ausgleichen. Zu ihrer Ableitung haben wir daher die mittleren täglichen Wasserstände eines gröfseren oder kleineren Zeitraums der Diskussion zu unterwerfen. Das in Nachfolgendem entwickelte Verfahren basirt auf dem Vorhandensein von 365 auf einander folgenden mittleren Wasserständen; es ist daher in Schaltjahren der 366. unberücksichtigt zu lassen und etwaige Lücken, die innerhalb des Jahres vorkommen mögen, sind auszufüllen, wozu am Schlusse dieses Paragraphen einige Andeutungen gegeben werden. Uebrigens kann jeder beliebige andere Zeitraum benutzt werden, es müssen dann aber die Zahlengröfsen der Normalgleichungen (D) und die Koëfficienten zur Befreiung der Summen von dem Einflufs der Tiden von kurzer Periode (E) von neuem dem gewählten Zeitraum entsprechend berechnet werden.

Der mittlere Wasserstand eines Tages kann auf verschiedene Weise gefunden werden. Sind stündliche Wasserstandsbeobachtungen vorhanden, sei es als direkte Pegelablesungen sei es als Ablesungen von selbstthätig durch einen registrirenden Fluthmesser aufgezeichneten Kurven, so bieten sich 3 Methoden dar, den mittleren Wasserstand zu finden: 1. kann man das einfache Mittel aus den 24 auf einander folgenden zu den Stunden 0^h, $1^h \ldots 23^h$ abgelesenen Wasserständen bilden; 2. addirt man zu der Summe der für die Stunden $1^h \ldots 23^h$ geltenden Wasserstände das Mittel aus den Wasserständen für 0^h und 24^h und dividirt durch 24, und 3. kann man das einfache Mittel der 25 Wasserstände für die Stunden $0^h \ldots 24^h$ nehmen. Bezeichnen wir die Wasserstände mit h_0, h_1, $h_2 \ldots h_{23}$, h_{24}, so findet sich der mittlere Wasserstand h nach den 3 Methoden:

$$(66)\quad \begin{cases} \text{(I)} & h = \frac{1}{24}\left(h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_{23}\right) \\ \text{(II)} & h = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_{23} + \frac{1}{2}h_{24}\right) \\ \text{(III)} & h = \frac{1}{25}\left(h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_{23} + h_{24}\right) \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dafs das Mittelwasser für die Mitte des betreffenden Zeitraums gilt; wird es nach (I) berechnet, so gilt es für $11^h\ 30^m$, nach (II) und (III) für 12^h, wenn die erste Ablesung h_0 für den Mittag gilt. Ist die Ablesung h_0 für irgend eine andere Zeit gemacht, so gelten die Mittelwerthe resp. für $11^h\ 30^m$ und 12^h nach dieser Zeit.

Aufser den Methoden, welche nur einzelne Wasserstände für die Bildung des Mittelwassers anwenden, kann man das letztere auch mit Hülfe des Planimeters durch Benutzung der ganzen Kurve finden. Hierzu sind 2 Methoden im Gebrauch: entweder umfährt man die vom Apparat selbstthätig aufgezeichnete

Kurve mit dem Fahrstift des Planimeters und dividirt den so erhaltenen Flächeninhalt durch die Länge der Abscissenaxe (Länge von 24 Stunden in Centimetern oder Millimetern auf dem Papier, auf welchem der Schreibstift des Fluthmessers die Kurven zeichnet), oder die Arbeit des Umfahrens der Kurve wird selbstthätig von dem Apparat ausgeführt, indem ein Planimeter in, je nach dem Wasserstande verschiedenem Abstande vom Mittelpunkt einer sich drehenden Glasscheibe, durch die Bewegung der letzteren, gedreht wird, verbunden mit Ablesung derselben alle 24 Stunden. Diese Konstruktion ist von dem Ingenieur Herrn Reitz in Hamburg zuerst angewendet worden und bei dem Fluthmesser in Helgoland (dem geodätischen Institut in Berlin gehörig, aber von dem Hydrographischen Amt verwaltet und dem Marine-Observatorium in Wilhelmshaven unterstellt), sowie bei einigen im Auslande (Cadix, Marseille) aufgestellten zur Ausführung gelangt und zwar, wie nebenher bemerkt werden möge, in mechanisch höchst vortrefflicher Weise.

Es ist hier nicht der Ort, die Vor- und Nachtheile des Planimeter-Verfahrens gegen die andern Methoden, das Mittelwasser zu finden, abzuwägen; wir werden in Folgendem unter Zugrundelegung derjenigen Methode, welche bis jetzt am häufigsten gebraucht worden ist (und dies auch wohl in Zukunft werden wird) die Regeln entwickeln, nach welchen man die Tiden von längerer Periode und die Höhe des mittleren Niveaus des Meeres über einer festen Marke ableiten kann, wobei wir die Aenderungen, welche in denselben bei Anwendung der anderen Methoden, speciell des Planimeters, einzutreten haben, angeben werden.

Von den 3 Methoden (66), aus stündlichen Wasserständen das Mittelwasser eines Tages abzuleiten, ist Methode (I) in der Praxis die bequemste und Methode (III) am wenigsten empfehlenswerth; überdies schliefst sich Methode (I) am engsten an das Planimeter-Verfahren an, und werden wir daher im Folgenden durchweg voraussetzen, dafs die Mittelwerthe nach dieser Methode gebildet sind.

Im Mittelwasser eines Tages, nach welcher Methode es immer gebildet sein mag, sind die Tiden von kurzer Periode, mit Ausnahme der Haupt-Sonnentide S, nicht völlig eliminirt, weil ihre Perioden nicht mit 24^h kommensurabel sind. Ehe wir daher die Mittelwasser zur Ableitung der Tiden von langer Periode und der Höhe des mittleren Niveaus des Meeres über einer festen Marke (A_0) benutzen können, müssen wir sie zuerst von diesen Restbeträgen der Tiden von kurzer Periode befreien, es ist daher unsere erste Aufgabe, die hierzu dienenden Formeln zu entwickeln.

Es sei $R\cos(\iota t - \zeta)$ der Ausdruck für irgend eine der Tiden von kurzer Periode, deren numerischer Werth sich aus der harmonischen Analyse der Beobachtungen desselben Jahres ergiebt, und es sei $\alpha = \iota \times 24 i - \zeta$ der Werth von $\iota t - \zeta$ für den Mittag des $(i+1)^{ten}$ Tages, dann sind:

(67) $$R\cos\alpha,\quad R\cos(\alpha+\iota),\quad R\cos(\alpha+2\iota)\ldots\ldots R\cos(\alpha+\tau\iota)$$

die Ausdrücke für die Höhe der betreffenden Tide zu den in gleichen Intervallen (in der Regel eine mittlere Stunde) auf einander folgenden Zeitmomenten $0, 1, 2, 3 \ldots \tau$, deren Anzahl $= \tau + 1$ ist. Es versteht sich von selbst, dafs für eine bestimmte Tide der Werth von ι sich nach dem Intervall richtet, in welchem die Beobachtungen auf einander folgen, er bedeutet die Aenderung des Arguments in 1^h, wenn die Beobachtungen sich in stündlichen Intervallen und in einer Sekunde, wenn sie sich von Sekunde zu Sekunde folgen; wir wollen indefs in letzterem Falle ein besonderes Zeichen $\iota' = {}^1/_{3600}\,\iota$ einführen, um Verwechselungen zu vermeiden.

Nehmen wir das Mittel aus den $(\tau+1)$ Höhen der Tide in (67), so erhalten wir ebenso wie für (60), wenn wir mit $\sin {}^1/_2\iota$ multipliciren und dividiren, den Mittelwerth

(68) $$= \frac{R}{\tau+1}\,\frac{\sin\frac{\tau+1}{2}\iota}{\sin\frac{1}{2}\iota}\cos\left(\alpha+\frac{\tau}{2}\iota\right)$$

und dies ist die Reduktion, welche von dem Mittelwasser des $(i+1)^{ten}$ Tages subtrahirt werden mufs, um dasselbe von dem Restbetrage der Tide $R\cos(\iota t - \zeta)$ zu befreien.

Ist das Mittelwasser nach Methode (I) und (III) berechnet, so ergiebt sich die an dasselbe anzubringende Reduktion, wenn wir in (68) resp. $\tau = 23$ oder $\tau = 24$ setzen, und ι bedeutet die Aenderung des Arguments in 1^h.

Haben wir zur Ermittelung des Mittelwassers das Planimeter benutzt, so können wir die Reduktion dadurch finden, dafs wir voraussetzen, die Werthe von $R\cos(\iota t - \zeta)$ wären von Sekunde zu Sekunde gegeben, und haben dann $\tau = 86399^s$ und ι' anstatt ι zu setzen.

Für Methode (II) findet sich die Reduktion ebenfalls leicht, wenn wir

$$\frac{R}{\tau+1}\left\{\frac{1}{2}\cos\alpha + \cos(\alpha+\iota) + \ldots\ldots + \cos(\alpha+\tau\iota) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\tau+1)\,\iota\right\}$$

mit $\sin {}^1/_2\,\iota$ multipliciren und dividiren, wodurch wir den Mittelwerth

$$= \frac{R}{\tau+1}\,\frac{\sin\frac{\tau+1}{2}\cos\frac{1}{2}\iota}{\sin\frac{1}{2}\iota}\cos\left(\alpha+\frac{\tau+1}{2}\iota\right) = \frac{R}{\tau+1}\,\frac{\sin\frac{\tau+1}{2}\iota}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\iota}\cos\left(\alpha+\frac{\tau+1}{2}\iota\right)$$

erhalten, worin $\tau = 23^h$ einzusetzen ist.

Führen wir die angedeuteten Substitutionen aus, so finden wir, dafs je nach der Methode, nach welcher das Mittelwasser erhalten ist, die folgenden Korrektionen zu demselben zu addiren sind, um dasselbe von dem Einflufs der Tide $R\cos(\iota t - \zeta)$ zu befreien.

$$(69)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\text{Methode (I):} & -\frac{1}{24}R\,\frac{\sin 12\,\iota}{\sin\frac{1}{2}\iota}\cos\left(\alpha+11\frac{1}{2}\iota\right) \\
\text{„ (II):} & -\frac{1}{24}R\,\frac{\sin 12\,\iota}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\iota}\cos\left(\alpha+12\,\iota\right) \\
\text{„ (III):} & -\frac{1}{25}R\,\frac{\sin\frac{25}{2}\iota}{\sin\frac{1}{2}\iota}\cos\left(\alpha+12\,\iota\right) \\
\text{Planimeter:} & -\frac{1}{86400}R\,\frac{\sin 43200\,\iota'}{\sin\frac{1}{2}\iota'}\cos\left(\alpha+\frac{86399}{2}\iota'\right) \\
\text{oder:} & -R\,\frac{\sin 12\,\iota}{12\,\iota}\cos\left(\alpha+12\,\iota\right)
\end{array}\right.$$

da wir ohne Fehler $\sin {}^1/_2\iota' = {}^1/_2\iota'$ setzen und unter dem Cosinus den Winkel um ${}^1/_2\,\iota'$ vermehren können.

Indem für R, α und ι, die einer bestimmten Tide von kurzer Periode und einem bestimmten Tage zugehörigen Werthe eingesetzt werden, kann die diesem Tage entsprechende Reduktion des Mittelwassers zur Befreiung von dem Resteinflusse der betreffenden Tide berechnet werden, und wenn dies für alle oder wenigstens für die gröfseren der Tiden von kurzer Periode geschehen ist, so haben wir im Mittelwasser nur die Konstante A_0, die Höhe des mittleren Niveaus des Meeres über einer festen Marke und die Tiden von langer Periode übrig und können nun dazu schreiten, diese Gröfsen abzuleiten.

Wir nehmen zunächst an, dafs jedes einzelne Mittelwasser von dem Einflufs der Tiden von kurzer Periode befreit sei (was für jede dieser Tiden die Berechnung von 365 Einzelwerthen voraussetzt, eine Arbeit, die, wie wir sehen werden, ganz aufserordentlich dadurch vereinfacht wird, dafs nur die zu bildenden Summen korrigirt werden), dann enthält dasselbe nur die Konstante A_0 und die Tiden von langer Periode. Von den letzteren sind, nach dem Vorgange der Engländer, die folgenden fünf ausgewählt: Mm, Mf, MSf, Sa und Ssa, für welche nach Tabelle A auf Seite 35 ff. die Aenderung des Arguments in der Zeiteinheit bezw.: $\sigma - \varpi$, 2σ, $2(\sigma-\eta)$, η und 2η ist. Die allgemeine Form einer Tide von langer Periode ist wie die der Tiden kurzer Periode: $R\cos(\iota t - \zeta) = A\cos\iota t + B\sin\iota t$, wenn wir $R\cos\zeta = A$ und $R\sin\zeta = B$ setzen.

Der nächste Schritt besteht darin, das Mittel aus den 365 mittleren Wasserständen zu nehmen, wodurch wir A_0 erhalten und dieses von den einzelnen

Mittelwassern zu subtrahiren. Die Differenz $h - A_0 = \delta h$ enthält dann nur die Tiden von langer Periode oder es ist:

(70)
$$\begin{aligned}\delta h = {} & A\cos(\sigma-\varpi)t + B\sin(\sigma-\varpi)t \\ & + C\cos 2\sigma t + D\sin 2\sigma t \\ & + C'\cos 2(\sigma-\eta)t + D'\sin 2(\sigma-\eta)t \\ & + E\cos nt + F\sin \eta t \\ & + G\cos 2\eta t + H\sin 2\eta t\end{aligned}$$

worin t die von $11^h\ 30^m$ des ersten Tages aus gerechnete Zeit bedeutet.

Der Gleichungen (70) haben wir nun 365, aus denen die 10 Koëfficienten A, B, C, D u. s. w. nach der Methode der kleinsten Quadrate abzuleiten sind.

Es seien l_1, l_2, l_3 u. s. w. die Aenderungen der in der Gleichung (70) vorkommenden Winkel in 24^h oder $= 24(\sigma-\varpi)$, $24 \times 2\sigma$ u. s. w. und A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3 u. s. w. die Koëfficienten und δh_i der Werth von δh um $11^h\ 30^m$ an dem $(i+1)^{ten}$ Tage, so wird:

$$\delta h_i = A_1\cos l_1 i + B_1\sin l_1 i + A_2\cos l_2 i + B_2\sin l_2 i + \ldots$$

Um die Normalgleichung für A_1 zu bilden, haben wir sämmtliche Gleichungen mit dem zugehörigen $\cos l_1 i$ $(i = 0 \ldots 364)$ zu multipliciren und die algebraische Summe dieser Produkte zu bilden; ebenso haben wir mit $\sin l_1 i$ zu multipliciren und zu summiren, um die Normalgleichung für B_1 zu erhalten u. s. f. Wir können daher $A_2\cos l_2 i\cos l_1 i$ und $B_2\sin l_2 i\cos l_1 i$ als die allgemeine Form der Glieder in den Normalgleichungen für die Koëfficienten A und ebenso $A_2\cos l_2 i\sin l_1 i$ und $B_2\sin l_2 i\sin l_1 i$ als die allgemeine Form der Glieder in den Normalgleichungen für die B ansehen und können daher, indem wir die Produkte der cos und sin durch die cos und sin der Summen und Differenzen der Winkel ersetzen, schreiben:

(71)
$$\left\{\begin{aligned}\delta h_i\cos l_1 i = {} & \frac{1}{2}A_2\left\{\cos(l_1+l_2)i + \cos(l_1-l_2)i\right\} \\ & + \frac{1}{2}B_2\left\{\sin(l_1+l_2)i - \sin(l_1-l_2)i\right\} + \ldots \\ \delta h_i\sin l_1 i = {} & \frac{1}{2}A_2\left\{\sin(l_1+l_2)i + \sin(l_1-l_2)i\right\} \\ & + \frac{1}{2}B_2\left\{-\cos(l_1+l_2)i + \cos(l_1-l_2)i\right\} + \ldots\end{aligned}\right.$$

Wird nun i successive $= 0, 1, 2 \ldots 364$ gesetzt und die Summation ausgeführt, so wird nach (60):

$$\sum_0^{364}\cos(l_1\pm l_2)i = \frac{\sin\frac{365}{2}(l_1\pm l_2)}{\sin\frac{1}{2}(l_1\pm l_2)}\cos 182(l_1\pm l_2)$$

$$\sum_0^{364}\sin(l_1\pm l_2)i = \frac{\sin\frac{365}{2}(l_1\pm l_2)}{\sin\frac{1}{2}(l_1\pm l_2)}\sin 182(l_1\pm l_2)$$

Zur Abkürzung setzen wir:

(72)
$$\varphi(l_1\pm l_2) = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{365}{2}(l_1\pm l_2)}{\sin\frac{1}{2}(l_1\pm l_2)}$$

und erhalten alsdann die Normalgleichungen für A_1 und B_1:

(73)
$$\left\{\begin{aligned}\Sigma\,\delta h\cos l_1 i = {} & \left\{\varphi(l_1+l_2)\cos 182(l_1+l_2) + \varphi(l_1-l_2)\cos 182(l_1-l_2)\right\}A_2 \\ & + \left\{\varphi(l_1+l_2)\sin 182(l_1+l_2) - \varphi(l_1-l_2)\sin 182(l_1-l_2)\right\}B_2 + \ldots \\ \Sigma\,\delta h\sin l_1 i = {} & \left\{\varphi(l_1+l_2)\sin 182(l_1+l_2) + \varphi(l_1-l_2)\sin 182(l_1-l_2)\right\}A_2 \\ & + \left\{-\varphi(l_1+l_2)\cos 182(l_1+l_2) + \varphi(l_1-l_2)\cos 182(l_1-l_2)\right\}B_2 + \ldots\end{aligned}\right.$$

worin für A_2, B_2 und l_2 successive A_1, B_1, l_1; A_2, B_2, l_2; A_3, B_3, l_3 u. s. w. einzusetzen ist. Es möge noch bemerkt werden, dafs:

$$\varphi(x) = \varphi(-x) \text{ und } \varphi(0) = 182{,}5$$

ist. Der letztere Fall tritt ein, wenn $l_2 = l_1$ ist, in welchem Fall $\varphi(l_1 - l_2) = 182{,}5$ und $\cos 182\,(l_1 - l_2) = 1$ ist. Die Koëfficienten von A_1 und B_1 in den Normalgleichungen werden daher nahe $= 182{,}5$ sein.

Auf gleiche Weise werden die Normalgleichungen für die andern Koëfficienten gebildet, indem man für l_1 die entsprechenden Werthe einsetzt.

Wird diese Rechnung nach (73) für die fünf Tiden von langer Periode ausgeführt, so erhalten wir die folgenden, dem „Report" für 1872 entnommenen Normalgleichungen (D) zur Bestimmung der Koëfficienten A, B, C, D u. s. w.

Die numerische Auflösung dieser Gleichungen durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren würde eine aufserordentlich weitläufige Arbeit sein; da aber ein Koëfficient in allen Gleichungen die andern bedeutend an Gröfse übertrifft, so ist hier eine Lösung durch successive Näherung sehr empfehlenswerth.[1])

Diese Methode läfst sich kurz so beschreiben: Man suche unter den die linke Seite der Gleichungen (D) bildenden $\Sigma \delta h \cos li$ die gröfste auf, dividire sie durch den Hauptfaktor der Horizontalreihe, in welcher sie steht, dann ist dies ein Näherungswerth für den Koëfficienten dieses Hauptfaktors, den man übrigens nicht auf zu viele Stellen berechnen sollte, weil sonst die nachherige Substitution unbequem wird. Diesen Näherungswerth setzt man nun auf der rechten Seite in alle Gleichungen ein und bringt die Produkte desselben mit den Koëfficienten mit entgegengesetzten Vorzeichen auf die linke Seite, wodurch also die Σ-Werthe eine entsprechende Veränderung erfahren. Unter den so veränderten Σ suche man wieder das gröfste und dividire durch den entsprechenden Hauptfaktor, so erhält man wieder einen Näherungswerth für einen andern Koëfficienten, der wiederum, eingesetzt und auf die andere Seite gebracht, die Σ verändert. So fährt man fort bis links nur noch Einheiten der letzten Stelle übrig sind, worauf das Verfahren abgebrochen wird. Dann werden endlich die zu denselben Koëfficienten successive gefundenen Näherungswerthe durch algebraische Addition zu den definitiven Werthen vereinigt. Man braucht indefs das Verfahren nicht so weit fortzusetzen, wie hier angedeutet wurde, wenn man die gesuchten Koëfficienten nur bis zu einem gewissen Grade der Annäherung haben will, man bricht dann ab, sobald der nächste Näherungswerth nicht mehr als $^1/_2$ Einheit der letzten Stelle, die man noch sicher haben will, betragen würde.

Das Nähere ist in den angeführten Werken nachzusehen.

Hat man auf diese Weise die Werthe der Koëfficienten A, B, C, D u. s. w. gefunden, so erhält man unter Benutzung der Schema's (S. 41) die Gröfsen R_0, ζ_0 und H_0 und $\varkappa_0$. Hierbei ist zu beachten, dafs ein Vermehrungsfaktor nicht erfordert wird, und dafs ζ sich auf $11^h\,30^m$ (bezw. 12^h wenn Methode II oder III oder das Reitz'sche Planimeter angewendet worden ist) bezieht, und daher die der Tide entsprechende Aenderung des Arguments in $11^1/_2{}^h$ (bezw. 12^h) zu dem durch die Rechnung gefundenen Werth von ζ hinzuaddirt werden mufs, um auf denselben Anfangstermin zu kommen wie für die Tiden von kurzer Periode.

Es ist schon oben gesagt worden, dafs die die linken Seiten der Gleichungen bildenden Summen von dem Einflufs der Tiden von kurzer Periode befreit sein müssen. Die bisherige Untersuchung hat vorausgesetzt, dafs an jedes einzelne Mittelwasser diese Reduktion angebracht worden sei, was eine sehr erhebliche Arbeit machen würde. Wir wollen nun eine Methode entwickeln, nach welcher wir die Summen mit den unreducirten Mittelwassern bilden und die Korrektion wegen der Tiden von kurzer Periode erst an die so gebildeten Summen anbringen. Wir haben dann für jede Tide von kurzer Periode nur eine einzige Korrektion zu berechnen.

Nach (69) ist die Reduktion, welche an $\delta h_i = h_i - A_0$ angebracht werden mufs, unter der Voraussetzung, dafs zur Berechnung von h_i Methode I gebraucht worden ist:

$$= -R\,\psi(\iota)\,\cos(\alpha + 11^1/_2\,\iota)$$

wenn wir:

$$\psi(\iota) = \frac{1}{24}\,\frac{\sin 12\,\iota}{\sin {}^1/_2\,\iota}$$

---

[1]) S. über die Methode: Gerling: Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie, „Report of the U. S. Coast survey", 1855, und von Freeden: Praxis der Methode der kleinsten Quadrate.

D.

Normalgleichungen für die Tiden von längerer Periode.

	Koëfficienten von A	Koëfficienten von B	Koëfficienten von C	Koëfficienten von D	Koëfficienten von C′	Koëfficienten von D′	Koëfficienten von E	Koëfficienten von F	Koëfficienten von G	Koëfficienten von H
$\Sigma\,\delta h \times \cos(\sigma-\varpi)t =$	+ 183,05	+ 2,14	+ 0,73	+ 4,29	+ 0,77	+ 5,04	+ 4,88	— 0,34	+ 4,96	— 0,69
$\times \sin(\sigma-\varpi)t =$	+ 2,14	+ 181,95	— 4,15	+ 1,02	— 4,90	+ 1,07	+ 3,80	+ 0,34	+ 3,88	+ 0,69
$\times \cos 2\sigma t =$	+ 0,73	— 4,15	+ 183,18	+ 0,88	+ 0,61	+ 0,92	— 1,50	— 0,10	— 1,51	— 0,19
$\times \sin 2\sigma t =$	+ 4,29	+ 1,02	+ 0,88	+ 181,82	+ 0,92	— 0,75	+ 3,05	— 0,08	+ 3,06	— 0,17
$\times \cos 2(\sigma-\eta)t =$	+ 0,77	— 4,90	+ 0,61	+ 0,92	+ 183,19	+ 0,97	— 1,68	— 0,11	— 1,70	— 0,23
$\times \sin 2(\sigma-\eta)t =$	+ 5,04	+ 1,07	+ 0,92	— 0,75	+ 0,97	+ 181,81	+ 3,25	— 0,10	+ 3,27	— 0,23
$\times \cos \eta t =$	+ 4,88	+ 3,80	— 1,50	+ 3,05	— 1,68	+ 3,25	+ 182,43	+ 0,00	— 0,14	+ 0,00
$\times \sin \eta t =$	— 0,34	+ 0,34	— 0,10	— 0,08	— 0,11	— 0,10	+ 0,00	+ 182,57	+ 0,00	+ 0,00
$\times \cos 2\eta t =$	+ 4,96	+ 3,88	— 1,51	+ 3,06	— 1,70	+ 3,27	— 0,14	+ 0,00	+ 182,43	+ 0,00
$\times \sin 2\eta t =$	— 0,69	+ 0,69	— 0,19	— 0,17	— 0,23	— 0,23	+ 0,00	+ 0,00	+ 0,00	+ 182,57

setzen. Wird für α sein Werth $\iota t - \zeta = 24\,i\,.\,\iota - \zeta$ eingesetzt und führen wir die Bezeichnungen $24\,\iota = m$ und $11^1/_2\,\iota - \zeta = \beta$ ein, so ist die Reduktion von δh_i

$$= -R\,\psi(\iota)\cdot\cos(mi+\beta)$$

und die Reduktion von $\delta h_i \cos li$

$$= -R\,\psi(\iota)\cos(mi+\beta)\cos li$$
$$= -{}^1/_2 R\,\psi(\iota)\left\{\cos\left((m+l)i+\beta\right)+\cos\left((m-l)i+\beta\right)\right\}$$

Ebenso wird die Reduktion von $\delta h_i \sin li$

$$= -{}^1/_2 R\,\psi(\iota)\left\{\sin\left((m+l)i+\beta\right)-\sin\left((m-l)i+\beta\right)\right\}$$

Werden die 365 Werthe dieser Reduktionen summirt, so erhalten wir die Reduktion von $\Sigma\delta h \cos li$

$$(74)\quad \left\{\begin{array}{l} = -R\,\psi(\iota)\left\{\varphi(m+l)\cos\left(182\,(m+l)+\beta\right)+\varphi(m-l)\cos\left(182\,(m-l)+\beta\right)\right\} \\ \qquad \text{und von } \Sigma\delta h \sin li \\ = -R\,\psi(\iota)\left\{\varphi(m+l)\sin\left(182\,(m+l)+\beta\right)-\varphi(m-l)\sin\left(182\,(m-l)+\beta\right)\right\} \end{array}\right.$$

wenn wir wie in (72)

$$\varphi(m\pm l) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{365}{2}(m\pm l)}{\sin\frac{1}{2}(m\pm l)}$$

setzen.

Es ist etwas bequemer, anstatt der in Formel (74) vorkommenden Gröfsen R und ζ die Koëfficienten $A = R\cos\zeta$ und $B = R\sin\zeta$, welche unmittelbar durch die harmonische Analyse gefunden werden, zu benutzen.

Wird

$$\Delta\,\iota = 182^d\,.\,m + 11^1/_2{}^h\,.\,\iota = 4379{,}5^h\,.\,\iota$$

gesetzt, so wird

$$182\,(m\pm l)+\beta = \Delta\,\iota \pm 182\,l - \zeta$$

und wenn die cos und sin aufgelöst werden, so erhält man leicht:

$$(75)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Reduktion von } \Sigma\delta h \cos li \\ = [A,\iota,l,\cos]\,A + [B,\iota,l,\cos]\,B \\ = -\left[\psi(\iota)\,\varphi(m+l)\cos(\Delta\iota+182\,l)+\psi(\iota)\,\varphi(m-l)\cos(\Delta\iota-182\,l)\right]A \\ = -\left[\psi(\iota)\,\varphi(m+l)\sin(\Delta\iota+182\,l)+\psi(\iota)\,\varphi(m-l)\sin(\Delta\iota-182\,l)\right]B \\ \qquad \text{und Reduktion von } \Sigma\delta h \sin li \\ = [A,\iota,l,\sin]\,A + [B,\iota,l,\sin]\,B \\ = -\left[\psi(\iota)\,\varphi(m+l)\sin(\Delta\iota+182\,l)-\psi(\iota)\,\varphi(m-l)\sin(\Delta\iota-182\,l)\right]A \\ = +\left[\psi(\iota)\,\varphi(m+l)\cos(\Delta\iota+182\,l)-\psi(\iota)\,\varphi(m-l)\cos(\Delta\iota-182\,l)\right]B \end{array}\right.$$

Bezüglich des Werthes der Gröfse $\varphi(m+l)$ möge noch bemerkt werden, dafs $\varphi(m+l) = 182{,}5$ ist, wenn ${}^1/_2(m+l) = 360°$ wird. Dieser Fall tritt ein, wenn $l = 24\times 2\,(\sigma-\eta)$ und $m = 24\times 2\,(\gamma-\sigma)$ ist, d. h. bei Befreiung der Normalgleichungen für die Koëfficienten C', D' der Tide MSf von der Wirkung der Tide M_2, denn $m+l = 24\times 2\,(\gamma-\eta) = 720°$.

Man könnte leicht, wie dies in Darwin's Abhandlung geschehen ist, die Formeln (75) so umformen, dafs man mit cos 182 l und sin 182 l multiplicirte Glieder erhält, es scheint indefs durch diese Umformung nur wenig gewonnen zu werden, da (75) für die Berechnung bequem genug ist, weshalb wir diese Umformung übergehen.

Es hat sich in der Praxis bei Bearbeitung der englischen Beobachtungen herausgestellt, dafs man von den Tiden von kurzer Periode nur M_2, N und O zu berücksichtigen braucht, doch ist die soeben auseinandergesetzte Methode, die Reduktion erst an den Summen vorzunehmen, eine so einfache, dafs man, falls es wünschenswerth erscheinen sollte, ohne grofse Mühe noch beliebig viele andere Tiden mitnehmen könnte, wozu es nur der Berechnung der Koëfficienten nach (75) bedürfen würde.

E.

Logarithmen der Koëfficienten zur Befreiung der $\Sigma\delta h \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} li$ von dem Einfluſs der Tiden von kurzer Periode.

$l =$	$\sigma - \varpi$	2σ	$2(\sigma - \eta)$	η	2η
			$(M_2): \iota = 2(\gamma - \sigma)$		
	−10	−10		−10	−10
log [A, ι, l, cos] =	− 8,74484	+ 7,48001	+ 0,75886	− 9,01745	− 8,16584
log [B, ι, l, cos] =	− 9,23137	− 8,57669	− 0,46580	− 8,87651	− 8,87772
log [A, ι, l, sin] =	− 9,23236	+ 8,62014	− 0,45332	− 7,24551	− 7,54777
log [B, ι, l, sin] =	+ 8,64444	+ 8,02202	− 0,75794	+ 7,67761	+ 7,98137
			$(N): \iota = 2\gamma - 3\sigma + \varpi$		
	−10	−10	−10	−10	−10
log [A, ι, l, cos] =	− 8,76967	+ 8,56585	+ 8,46805	− 8,24551	− 8,24551
log [B, ι, l, cos] =	− 8,88975	− 9,34902	− 9,28744	+ 7,40483	+ 7,40483
log [A, ι, l, sin] =	− 8,31366	− 9,18312	− 9,08672	+ 6,30103	+ 6,61278
log [B, ι, l, sin] =	+ 9,05618	− 8,93166	− 8,90747	+ 5,84510	+ 6,17609
			$(O): \iota = \gamma - 2\sigma$		
	−10	−10	−10	−10	−10
log [A, ι, l, cos] =	− 8,81191	+ 8,22350	+ 8,19921	− 9,28421	− 9,28646
log [B, ι, l, cos] =	− 9,54114	− 8,89143	− 8,91158	− 9,26150	− 9,26271
log [A, ι, l, sin] =	− 9,53811	+ 8,92521	+ 8,94191	− 7,60206	− 7,96661
log [B, ι, l, sin] =	+ 8,60767	+ 8,52879	+ 8,51786	+ 7,95279	+ 8,25575

Die Tabelle (E) enthält die Logarithmen der nach (75) berechneten Koëfficienten [A, ι, l, cos] u. s. w., welche mit A und B der entsprechenden Tide von kurzer Periode multiplicirt und algebraisch addirt die Reduktion von $\Sigma\delta h \cos li$ und $\Sigma\delta h \sin li$ ergeben.

Wenn der Anfangstermin für das zur Ableitung der Tiden von längerer Periode benutzte Material ein anderer ist, wie für die Tiden von kurzer Periode, wenn man z. B. für die Ableitung der ersteren ein anderes Jahr benutzt, wie für die letzteren, so hat man zu beachten, daſs die Koëfficienten A und B für die Tiden kurzer Periode, deren Einfluſs man beseitigen will, nach (§ 5) erst auf die Anfangsepoche der Tiden längerer Periode reducirt werden müssen, worauf man $A = R_1 \cos(V_0 + u - \varkappa)$ und $B = R_1 \sin(V_0 + u - \varkappa)$ berechnet.

Hat man die mittleren täglichen Wasserstände durch das Reitz'sche Planimeter gefunden, so haben wir in den Formeln (75)

$$\psi(\iota) = \frac{\sin 12\,\iota}{12\,\iota} \text{ und } \Delta\iota = 182^{d}\,m + 12^{h}\,\iota = 4380^{h}\,\iota$$

zu setzen und dementsprechend die Koëfficienten (E) neu zu berechnen, alles Andere bleibt unverändert. Entsprechende Aenderungen sind vorzunehmen, wenn die Mittelwasser nach (66) Methode (II) oder III berechnet worden sind.

Es ist jetzt noch zu zeigen, auf welche Weise man die $\Sigma\delta h \cos li$ und $\Sigma\delta h \sin li$ bildet. Das direkte Verfahren, nach welchem man jedes der 365 δh mit dem zugehörigen $\cos li$ und $\sin li$ multiplicirt und alsdann die algebraischen Summen bildet, würde sehr weitläufig sein, da man für jede Tide 730, im Ganzen für die 5 Tiden von langer Periode also 3650 Multiplikationen auszuführen haben würde. Man kann sich aber, ohne eine irgend in Betracht kommende Unsicherheit, durch das folgende, von Prof. J. C. Adams in Cambridge vorgeschlagene Verfahren die Arbeit sehr wesentlich erleichtern.

Das Verfahren besteht darin, die $\cos li$ und $\sin li$ in 11 Gruppen zu theilen, je nachdem ihr Werth einer der Zahlen $\pm 1{,}0$, $\pm 0{,}9$, $\pm 0{,}8$ . . . . . $\pm 0{,}1$, $0{,}0$ am nächsten liegt, die δh in derjenigen Gruppe zu sammeln, in

welche die cos oder sin, mit denen sie multiplicirt werden sollen, fallen und ihre algebraische Summe mit der betreffenden Gruppenzahl 1,0, 0,9 ... 0,1, 0,0 zu multipliciren.

Die Voraussetzung, auf der dies Verfahren beruht, ist demnach die, dafs unter einer sehr grofsen Anzahl von cos oder sin ebenso viele über wie unter eine der genannten abgerundeten Zahlen fallen werden, so dafs im Mittel diese letztere der richtige Multiplikator sein werde. Diese Voraussetzung trifft bei allen Multiplikatoren zu mit Ausnahme von 1,0, weil ein cos oder sin nicht gröfser als 1 werden kann. Die algebraische Summe der in die erste Gruppe fallenden δh ist daher nicht mit 1,0, sondern mit 0,975 zu multipliciren, obwohl es im Allgemeinen wohl kaum zu einem grofsen Fehler Anlafs geben würde, wenn man den Multiplikator 1 anwendete.

Diese Gruppirung der δh kann in folgender Weise leicht und sicher ausgeführt werden.

Man nimmt ein Schema (F), welches 11 Haupt-Vertikalspalten mit den Ueberschriften: 1,0 (richtiger 0,975), 0,9, 0,8 . . . . 0,1, 0,0 und eine beliebige Anzahl Horizontalreihen enthält. Jede der Haupt-Vertikalspalten ist in zwei Unterabtheilungen getheilt, die mit + und — bezeichnet sind, weil die cos und sin diese Vorzeichen haben können. Man entnimmt nun einer Tabelle, welche man für jede Tide vorher konstruirt hat, für jeden Tag den auf eine der genannten Zahlen abgerundeten Werth des cos oder sin, je nachdem man $\Sigma\delta h \cos li$ oder $\Sigma\delta h \sin li$ ableiten will, und trägt die Nummer des Tages (der erste Tag wird mit 0 bezeichnet) in die betreffende Rubrik ein, und zwar in die + oder — Spalte, je nachdem der cos oder sin das + oder — Vorzeichen hat. In das so vorbereitete Schema werden nun die δh (ohne Vorzeichen) in die Rubriken eingetragen, in denen die Nummern der Tage stehen, welchen sie angehören, und zwar die $+\delta h$ in dieselbe Spalte, wo die Nummer steht, die $-\delta h$ in die Nachbarspalte unter derselben Ueberschrift. Nachdem alle 365 Werthe eingetragen worden sind, wird für jede Spalte die Summe gebildet, dann die Differenz der + Summe und der — Summe jeder Gruppe genommen, welche das Vorzeichen der gröfseren Summe erhält, und diese Differenzen mit den die Ueberschrift der Haupt-Rubriken bildenden Zahlen multiplicirt, dann giebt die algebraische Summe dieser Produkte das gesuchte $\Sigma\delta h \cos li$ oder $\Sigma\delta h \sin li$.

Die auf die Rubrik 0,0 entfallenden δh brauchen natürlich nicht eingetragen oder, wenn man sie der Vollständigkeit halber doch hinschreibt, nicht summirt zu werden.

Das anliegende Schema (F), in welchem des Beispiels halber die Eintragungen für $\Sigma\delta h \cos li$ der Tide Mm markirt sind, wird wohl genügen, dies Verfahren zu verdeutlichen.

Zum Schlufs mögen noch einige Bemerkungen über das bei dem Vorhandensein von Lücken in den Tagesmitteln einzuschlagende Verfahren ihren Platz finden, welche wir aus der Abhandlung von Darwin übersetzen, ohne jedoch damit Alles empfehlen zu wollen. Da indefs die gröfsere Erfahrung auf Seiten der Engländer ist, so verdienen die Vorschläge jedenfalls volle Beachtung.

„Es kann von Zeit zu Zeit passiren, dafs der Fluthmesser einige Tage lang aufhört zu funktioniren, weil die Uhr stehen geblieben, das Zuleitungsrohr verstopft oder irgend ein anderes Ereignifs eingetreten ist. In diesem Falle wird in den Werthen von δh eine Lücke sein. Nun beruht aber das ganze Verfahren auf dem Vorhandensein von 365 kontinuirlichen Werthen von δh; sollen also die Beobachtungen dieses Jahres nicht geopfert werden, so mufs die Lücke ausgefüllt werden. Wenn nicht mehr als drei oder vier Tage fehlen, wird es am besten sein, die Werthe von δh auf jeder Seite der Lücke graphisch aufzutragen, die Lücke durch eine aus freier Hand gezogene Kurve zu ergänzen und die durch die Kurve gegebenen Werthe von δh zu benutzen. Ist der Ausfall an Beobachtungen von etwas längerer Dauer, so können verschiedene Verfahrungsweisen angegeben werden, und es ist Sache des Urtheils, welche derselben man anwenden will.

„Ist eine andere Beobachtungsstation in der Nachbarschaft, so können die Werthe von δh für diese Station eingesetzt werden.

Ort: Anfangsdatum: Tide: Mm $\Sigma \delta h \cos(\sigma - \varpi) t$ No.

1,0 (0,975) +	1,0 (0,975) −	0,9 +	0,9 −	0,8 +	0,8 −	0,7 +	0,7 −	0,6 +	0,6 −	0,5 +	0,5 −	0,4 +	0,4 −	0,3 +	0,3 −	0,2 +	0,2 −	0,1 +	0,1 −	0,0
0																				
1		2		3				4				5				6				7
	13		12		11		10				9				8					
	14																			
	15		16				17		18				19				20			
27		26		25		24				23				22				21		
28		29		30		31				32				33				34		
	40		39				38		37						36				35	
	41																			
	42		43		44		45				46				47					48
54		53		52				51				50				49				
u. s. w.								u. s. w.						u. s. w.						
	318		319		320				321				322				323			
330		329		328		327				326				325				324		
331																				
332		333				334				335				336				337		
	344		343		342		341				340				339				338	
	345		346		347		348				349				350				351	
357		356				355		354				353				352				
358																				
359		360		361				362		363						364				
																				Summe

„Man kann auch die Werthe von δh für einen anderen Theil des Jahres, wo die Deklinationen von Mond und Sonne so nahe wie möglich dieselben sind wie während der Lücke, benutzen.

„Es kann indefs vorkommen, dafs die Lücke von beträchtlicher Länge ist, so dafs die vorhergehenden Methoden nicht anwendbar sind; wie dies z. B. im Jahre 1882 für Vizagapatam eintrat, wo die Beobachtungen für 67 Tage fehlen. In diesem Falle kann das folgende Verfahren angewendet werden:

„Man suche genäherte Werthe für die Koëfficienten der Tiden von langer Periode und fülle die Lücke aus durch die berechneten Höhen.

„Um diese genäherten Werthe zu finden, bilden wir die $\Sigma\delta h \cos lt$ und $\Sigma\delta h \sin lt$ für die Tage, für welche Beobachtungen vorhanden sind, vernachlässigen in den 10 Normalgleichungen (D) alle Glieder mit kleinen Koëfficienten und substituiren für den Koëfficienten des Hauptgliedes (ca 182,5) einen Koëfficienten $=$ 182,5 — die halbe Anzahl der Tage in der Lücke. So haben wir z. B. für Vizagapatam im Jahre 1882 als Koëfficienten des Hauptgliedes $182{,}5 - {}^1/_2 \times 67 = 149$ und daher genähert $149A = \Sigma\delta h \cos(\sigma - \varpi)\, t$ u. s. w. zu setzen. Nachdem man die genäherten Werthe für A, B, C, D u. s. w. gefunden hat, ist es leicht, die genäherte Höhe der Tide für die Tage der Lücke zu berechnen. Dies Verfahren läfst sich auch anwenden, wenn die Lücke in den Beobachtungen nur von kurzer Dauer ist.

„Man kann diese Methode anwenden, man mag mit reducirten oder nichtreducirten täglichen Mitteln arbeiten, denn wenn die täglichen Mittel nicht reducirt sind, wie es in Zukunft gehalten werden soll, so führen wir eben mit den Zahlen, durch welche die Lücke ausgefüllt wird, die fiktiven Tiden von langer Periode[1]) ein, welche durch Anwendung der Reduktions-Koëfficienten (E) bei der Vorbereitung der 10 Normalgleichungen für die Auflösung entfernt werden.

„Es liefsen sich noch andere Methoden, eine Unterbrechung der Registrirungen zu behandeln, angeben. Findet die Unterbrechung nahe am Anfang oder Ende des Jahres statt, so könnte man die Beobachtungen vor oder nach der Lücke vernachlässigen und die 100 Koëfficienten der Gleichungen (D) und die Reduktions-Koëfficienten (E) für die übrig bleibende Anzahl von Tagen von neuem berechnen. Ist die Lücke in der Mitte, so könnte man die Koëfficienten (D) und (E) so berechnen, als wenn die ausgefallenen Tage Beobachtungstage wären, wobei zu berücksichtigen ist, dafs die Formeln durch die Erwägung, dafs die Zeit von $11^h\ 30^m$ am ersten Tage des Jahres und nicht von $11^h\ 30^m$ des ersten Tages der Lücke aus zu zählen ist, modificirt werden müssen.

„Die so berechneten Koëfficienten sind dann von den in (D) und (E) gegebenen Werthen zu subtrahiren und für die weitere Rechnung die so verbesserten Normalgleichungen und Reduktions-Koëfficienten anzuwenden.

„Es mufs dem Urtheile des Bearbeiters überlassen werden, welche dieser verschiedenen Methoden in einem gegebenen Falle anzuwenden ist.“

---

[1]) Offenbar kann man den im mittleren Wasserstande für die einzelnen Tage zurückbleibenden Restbetrag einer Tide von kurzer Periode als Tide von langer Periode ansehen.

Hülfstafeln.

1.

Werthe von s (mittlere Länge des Mondes)
um 0^h Jan. 1 m. Zt. Greenwich.

Jahr	s	Jahr	s	Jahr	s	Jahr	s
	°		°		°		°
1865	329,7392	1880	150,0419	1895	343,5210	1910	163,8237
66	99,1241	81	292,6032	96	112,9059	11	293,2086
67	228,5090	82	61,9881	97	255,4672	12	62,5935
68	357,8939	83	191,3730	98	24,8521	13	205,1548
69	140,4552	84	320,7579	99	154,2370	14	334,5397
1870	269,8401	1885	103,3192	1900	283,6219	1915	103,9246
71	39,2250	86	232,7041	01	53,0068	16	233,3095
72	168,6099	87	2,0890	02	182,3917	17	15,8708
73	311,1712	88	131,4739	03	311,7766	18	145,2557
74	80,5561	89	274,0352	04	81,1615	19	274,6406
1875	209,9410	1890	43,4201	1905	223,7228	1920	44,0255
76	339,3259	91	172,8050	06	353,1077	21	186,5868
77	121,8872	92	302,1899	07	122,4926	22	315,9717
78	251,2721	93	84,7512	08	251,8775	23	85,3566
79	20,6570	94	214,1361	09	34,4388	24	214,7415

Tage seit Jan. 1	Datum	Zunahme von s	Tage seit Jan. 1	Datum	Zunahme von s		
		°			°		°
10	Jan. 11	131,7640	190	Juli 10	343,5154	1	13,1764
20	21	263,5279	200	20	115,2794	2	26,3528
30	31	35,2919	210	30	247,0434	3	39,5292
40	Febr. 10	167,0559	220	Aug. 9	18,8073	4	52,7056
50	20	298,8198	230	19	150,5713	5	65,8820
60	März 2	70,5838	240	29	282,3353	6	79,0584
70	12	202,3478	250	Sept. 8	54,0992	7	92,2348
80	22	334,1118	260	18	185,8632	8	105,4112
90	April 1	105,8757	270	28	317,6272	9	118,5876
100	11	237,6397	280	Okt. 8	89,3912		
110	21	9,4037	290	18	221,1551		
120	Mai 1	141,1676	300	28	352,9191		
130	11	272,9316	310	Nov. 7	124,6831		
140	21	44,6956	320	17	256,4470		
150	31	176,4596	330	27	28,2110		
160	Juni 10	308,2235	340	Dez. 7	159,9750		
170	20	79,9875	350	17	291,7390		
180	30	211,7515	360	27	63,5029		

In Schaltjahren ist nach dem 28. Februar das Datum um einen Tag zu vermehren.

Das Jahr 1900 ist kein Schaltjahr.

2.

Werthe von h (mittlere Länge der Sonne)
um 0^h Jan. 1 m. Zt. Greenwich.

Jahr	h	Jahr	h	Jahr	h	Jahr	h
	°		°		°		°
1865	281,1526	1880	280,5287	1895	280,8905	1910	280,2666
66	280,9139	81	281,2756	96	280,6518	11	280,0279
67	280,6751	82	281,0369	97	281,3987	12	279,7892
68	280,4364	83	280,7982	98	281,1600	13	280,5361
69	281,1834	84	280,5595	99	280,9213	14	280,2974
1870	280,9446	1885	281,3064	1900	280,6826	1915	280,0587
71	280,7059	86	281,0677	01	280,4438	16	279,8200
72	280,4672	87	280,8290	02	280,2051	17	280,5669
73	281,2141	88	280,5902	03	279,9664	18	280,3282
74	280,9754	89	281,3372	04	279,7277	19	280,0895
1875	280,7367	1890	281,0984	1905	280,4746	1920	279,8508
76	280,4980	91	280,8597	06	280,2359	21	280,5977
77	281,2449	92	280,6210	07	279,9972	22	280,3590
78	281,0062	93	281,3679	08	279,7584	23	280,1202
79	280,7674	94	281,1292	09	280,5054	24	279,8815

Tage seit Jan. 1	Datum	Zunahme von h	Tage seit Jan. 1	Datum	Zunahme von h		
		°			°		°
10	Jan. 11	9,8565	190	Juli 10	187,2730	1	0,9856
20	21	19,7129	200	20	197,1295	2	1,9713
30	31	29,5694	210	30	206,9859	3	2,9569
40	Febr. 10	39,4259	220	Aug. 9	216,8424	4	3,9426
50	20	49,2824	230	19	226,6989	5	4,9282
60	März 2	59,1388	240	29	236,5554	6	5,9139
70	12	68,9953	250	Sept. 8	246,4118	7	6,8995
80	22	78,8518	260	18	256,2683	8	7,8852
90	April 1	88,7083	270	28	266,1248	9	8,8708
100	11	98,5647	280	Okt. 8	275,9813		
110	21	108,4212	290	18	285,8377		
120	Mai 1	118,2777	300	28	295,6942		
130	11	128,1342	310	Nov. 7	305,5507		
140	21	137,9906	320	17	315,4071		
150	31	147,8471	330	27	325,2636		
160	Juni 10	157,7036	340	Dez. 7	335,1201		
170	20	167,5600	350	17	344,9766		
180	30	177,4165	360	27	354,8330		

In Schaltjahren ist nach dem 28. Februar das Datum um einen Tag zu vermehren.

Das Jahr 1900 ist kein Schaltjahr.

3.

Werthe von N (Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn) um 0^h Jan. 1 m. Zt. Greenwich.

Jahr	N	Jahr	N	Jahr	N	Jahr	N
	°		°		°		°
1865	216,0391	1880	285,9569	1895	355,8217	1910	65,7395
66	196,7109	81	266,5757	96	336,4935	11	46,4112
67	177,3826	82	247,2475	97	317,1123	12	27,0830
68	158,0544	83	227,9192	98	297,7841	13	7,7018
69	138,6732	84	208,5910	99	278,4558	14	348,3736
1870	119,3450	1885	189,2098	1900	259,1276	1915	329,0454
71	100,0168	86	169,8816	01	239,7994	16	309,7172
72	80,6886	87	150,5534	02	220,4712	17	290,3360
73	61,3074	88	131,2252	03	201,1429	18	271,0078
74	41,9792	89	111,8440	04	181,8147	19	251,6795
1875	22,6509	1890	92,5158	1905	162,4335	1920	232,3512
76	3,3227	91	73,1875	06	143,1053	21	212,9699
77	343,9415	92	53,8593	07	123,7771	22	193,6416
78	324,6133	93	34,4781	08	104,4489	23	174,3133
79	305,2851	94	15,1499	09	85,0677	24	154,9850

Tage seit Jan. 1	Datum	Abnahme von N	Tage seit Jan. 1	Datum	Abnahme von N		
		°			°		°
10	Jan. 11	0,5295	190	Juli 10	10,0613	1	0,0530
20	21	1,0591	200	20	10,5908	2	0,1059
30	31	1,5886	210	30	11,1203	3	0,1589
40	Febr. 10	2,1182	220	Aug. 9	11,6499	4	0,2118
50	20	2,6477	230	19	12,1794	5	0,2648
60	März 2	3,1772	240	29	12,7090	6	0,3177
70	12	3,7068	250	Sept. 8	13,2385	7	0,3707
80	22	4,2363	260	18	13,7681	8	0,4236
90	April 1	4,7659	270	28	14,2976	9	0,4766
100	11	5,2954	280	Okt. 8	14,8271		
110	21	5,8249	290	18	15,3567		
120	Mai 1	6,3545	300	28	15,8862		
130	11	6,8840	310	Nov. 7	16,4158		
140	21	7,4136	320	17	16,9453		
150	31	7,9431	330	27	17,4748		
160	Juni 10	8,4726	340	Dez. 7	18,0044		
170	20	9,0022	350	17	18,5339		
180	30	9,5317	360	27	19,0635		

In Schaltjahren ist nach dem 28. Februar das Datum um einen Tag zu vermehren.

Das Jahr 1900 ist kein Schaltjahr.

4.

Werthe von p (Perigäum der Mondbahn)
um 0^h Jan. 1 m. Zt. Greenwich.

Jahr	p	Jahr	p	Jahr	p	Jahr	p
	°		°		°		°
1865	350,3605	1880	240,6322	1895	131,0153	1910	21,2870
66	31,0230	81	281,4061	96	171,6778	11	61,9495
67	71,6855	82	322,0686	97	212,4517	12	102,6120
68	112,3480	83	2,7311	98	253,1142	13	143,3859
69	153,1219	84	43,3936	99	293,7767	14	184,0484
1870	193,7844	1885	84,1675	1900	334,4392	1915	224,7109
71	234,4469	86	124,8300	01	15,1017	16	265,3734
72	275,1094	87	165,4925	02	55,7642	17	306,1473
73	315,8833	88	206,1550	03	96,4267	18	346,8098
74	356,5458	89	246,9289	04	137,0892	19	27,4723
1875	37,2083	1890	287,5914	1905	177,8631	1920	68,1348
76	77,8708	91	328,2539	06	218,5256	21	108,9087
77	118,6447	92	8,9164	07	259,1881	22	149,5712
78	159,3072	93	49,6903	08	299,8506	23	190,2337
79	199,9697	94	90,3528	09	340,6245	24	230,8962

Tage seit Jan. 1	Datum	Zunahme von p	Tage seit Jan. 1	Datum	Zunahme von p		
		°			°		°
10	Jan. 11	1,1140	190	Juli 10	21,1668	1	0,1114
20	21	2,2281	200	20	22,2808	2	0,2228
30	31	3,3421	210	30	23,3948	3	0,3342
40	Febr. 10	4,4562	220	Aug. 9	24,5089	4	0,4456
50	20	5,5702	230	19	25,6229	5	0,5570
60	März 2	6,6842	240	29	26,7370	6	0,6684
70	12	7,7983	250	Sept. 8	27,8510	7	0,7798
80	22	8,9123	260	18	28,9650	8	0,8912
90	April 1	10,0264	270	28	30,0791	9	1,0026
100	11	11,1404	280	Okt. 8	31,1931		
110	21	12,2544	290	18	32,3072		
120	Mai 1	13,3685	300	28	33,4212		
130	11	14,4825	310	Nov. 7	34,5352		
140	21	15,5966	320	17	35,6493		
150	31	16,7106	330	27	36,7633		
160	Juni 10	17,8246	340	Dez. 7	37,8744		
170	20	18,9387	350	17	38,9914		
180	30	20,0527	360	27	40,1054		

In Schaltjahren ist das Datum nach dem 28. Februar um einen Tag zu vermehren.

Das Jahr 1900 ist kein Schaltjahr.

5.

Werthe von J, ν, ξ für verschiedene Werthe von N.

N	J	ν	ξ	N	J	ν	ξ
0°	28,°6017	0,°0000	0,°0000	90°	23,°9819	12,°7506	11,°6828
2	28,5992	0,3747	0,3369	92	23,8056	12,8331	11,7657
4	28,5911	0,7492	0,6739	94	23,6283	12,9011	11,8357
6	28,5783	1,1231	1,0103	96	23,4503	12,9547	11,8930
8	28,5600	1,4964	1,3461	98	23,2714	12,9936	11,9364
10	28,5367	1,8686	1,6811	100	23,0922	13,0172	11,9658
12	28,5081	2,2394	2,0153	102	22,9128	13,0250	11,9811
14	28,4744	2,6089	2,3478	104	22,7333	13,0167	11,9817
16	28,4358	2,9764	2,6792	106	22,5542	12,9922	11,9672
18	28,3919	3,3422	3,0089	108	22,3757	12,9506	11,9369
20	28,3428	3,7053	3,3364	110	22,1979	12,8925	11,8900
22	28,2889	4,0661	3,6622	112	22,0208	12,8167	11,8283
24	28,2300	4,4239	3,9853	114	21,8447	12,7233	11,7507
26	28,1661	4,7789	4,3061	116	21,6700	12,6119	11,6561
28	28,0975	5,1303	4,6242	118	21,4969	12,4825	11,5428
30	28,0239	5,4781	4,9392	120	21,3258	12,3344	11,4133
32	27,9456	5,8219	5,2511	122	21,1569	12,1678	11,2656
34	27,8622	6,1617	5,5592	124	20,9903	11,9825	11,1014
36	27,7744	6,4969	5,8636	126	20,8264	11,7781	10,9183
38	27,6822	6,8275	6,1644	128	20,6656	11,5547	10,7167
40	27,5853	7,1531	6,4608	130	20,5078	11,3119	10,4972
42	27,4842	7,4733	6,7530	132	20,3533	11,0503	10,2603
44	27,3781	7,7881	7,0404	134	20,2025	10,7694	10,0056
46	27,2683	8,0967	7,3225	136	20,0558	10,4694	9,7317
48	27,1539	8,3994	7,5994	138	19,9133	10,1506	9,4400
50	27,0356	8,6953	7,8711	140	19,7753	9,8128	9,1306
52	26,9133	8,9847	8,1372	142	19,6422	9,4564	8,8028
54	26,7872	9,2667	8,3972	144	19,5139	9,0820	8,4583
56	26,6569	9,5417	8,6506	146	19,3911	8,6899	8,0961
58	26,5231	9,8086	8,8969	148	19,2733	8,2803	7,7183
60	26,3858	10,0675	9,1372	150	19,1614	7,8542	7,3242
62	26,2450	10,3181	9,3700	152	19,0558	7,4114	6,9136
64	26,1008	10,5597	9,5956	154	18,9565	6,9528	6,4878
66	25,9533	10,7925	9,8128	156	18,8634	6,4800	6,0489
68	25,8025	11,0161	10,0213	158	18,7769	5,9925	5,5953
70	25,6489	11,2297	10,2214	160	18,6972	5,4922	5,1294
72	25,4925	11,4333	10,4131	162	18,6244	4,9794	4,6519
74	25,3336	11,6261	10,5964	164	18,5589	4,4556	4,1636
76	25,1719	11,8083	10,7694	166	18,5011	3,9214	3,6650
78	25,0078	11,9794	10,9322	168	18,4503	3,3786	3,1581
80	24,8414	12,1392	11,0844	170	18,4069	2,8278	2,6436
82	24,6728	12,2869	11,2259	172	18,3711	2,2703	2,1228
84	24,5028	12,4219	11,3578	174	18,3439	1,7072	1,5967
86	24,3306	12,5447	11,4779	176	18,3242	1,1406	1,0667
88	24,1569	12,6544	11,5861	178	18,3122	0,5708	0,5339
90	23,9819	12,7506	11,6828	180	18,3083	0,0000	0,0000

N wird vom Frühlingspunkte aus positiv und negativ von 0° bis 180° gezählt.

J hat für positive und negative N denselben Werth.

ν und ξ haben das Vorzeichen von N.

6.

Logarithmen der Reduktionsfaktoren $\frac{1}{f}$ für verschiedene Werthe von J.

J	$\frac{\cos \frac{1}{2}\omega^4 \cos \frac{1}{2}i^4}{\cos \frac{1}{2}J^4}$		$\frac{\sin \omega^2 (1-\frac{3}{2}\sin i^2)}{\sin J^2}$		$\frac{\sin \omega \cos \frac{1}{2}\omega^2 \cos \frac{1}{2}i^4}{\sin J \cos \frac{1}{2}J^2}$		$\frac{\sin \omega \sin \frac{1}{2}\omega^2 \cos \frac{1}{2}i^4}{\sin J \sin \frac{1}{2}J^2}$		$\frac{\sin \omega \cos \omega (1-\frac{3}{2}\sin i^2)}{\sin J \cos J}$		$\frac{\sin \omega^2 \cos \frac{1}{2}i^4}{\sin J^2}$		$\frac{(1-\frac{3}{2}\sin \omega^2)(1-\frac{3}{2}\sin i^2)}{(1-\frac{3}{2}\sin J^2)}$		J
18,2°	9,98360	25	0,20531	459	0,09622	218	0,32145	702	0,08485	205	0,20883	459	9,94560	79	18,2°
,3	,98385	24	,20072	457	,09404	216	,31443	697	,08280	203	,20424	457	,94639	80	,3
,4	,98409	25	,19615	455	,09188	215	,30746	694	,08077	202	,19967	455	,94719	80	,4
18,5	9,98434	24	0,19160	452	0,08973	213	0,30052	690	0,07875	200	0,19512	451	9,94799	81	18,5
,6	,98458	26	,18708	449	,08760	212	,29362	687	,07675	199	,19061	450	,94880	81	,6
,7	,98484	24	,18259	446	,08548	211	,28675	682	,07476	198	,18611	446	,94961	82	,7
,8	,98508	26	,17813	444	,08337	210	,27993	679	,07278	196	,18165	444	,95043	83	,8
,9	,98534	25	,17369	442	,08127	208	,27314	675	,07082	195	,17721	442	,95126	83	,9
19,0	9,98559	25	0,16927	439	0,07919	207	0,26639	671	0,06887	193	0,17279	439	9,95209	83	19,0
,1	,98584	26	,16488	437	,07712	205	,25968	668	,06694	192	,16840	436	,95292	84	,1
,2	,98610	26	,16051	434	,07507	204	,25300	663	,06502	191	,16404	434	,95376	85	,2
,3	,98636	26	,15617	431	,07303	203	,24637	661	,06311	189	,15970	432	,95461	85	,3
,4	,98662	26	,15186	430	,07100	202	,23976	657	,06122	188	,15538	429	,95546	85	,4
19,5	9,98688	26	0,14756	427	0,06898	200	0,23319	653	0,05934	186	0,15109	427	9,95631	87	19,5
,6	,98714	26	,14329	424	,06698	200	,22666	650	,05748	186	,14682	425	,95718	86	,6
,7	,98740	26	,13905	422	,06498	197	,22016	647	,05562	183	,14257	422	,95804	88	,7
,8	,98766	27	,13483	420	,06301	197	,21369	643	,05379	183	,13835	420	,95892	87	,8
,9	,98793	27	,13063	418	,06104	196	,20726	640	,05196	181	,13415	418	,95979	89	,9
20,0	9,98820	26	0,12645	415	0,05908	194	0,20086	636	0,05015	180	0,12997	415	9,96068	89	20,0
,1	,98846	27	,12230	413	,05714	193	,19450	633	,04835	179	,12582	413	,96157	89	,1
,2	,98873	27	,11817	411	,05521	192	,18817	630	,04656	178	,12169	411	,96246	90	,2
,3	,98900	28	,11406	409	,05329	191	,18187	627	,04478	176	,11758	409	,96336	91	,3
,4	,98928	27	,10997	407	,05138	189	,17560	624	,04302	175	,11349	406	,96427	91	,4
20,5	9,98955	27	0,10590	404	0,04949	189	0,16936	620	0,04127	174	0,10943	405	9,96518	92	20,5
,6	,98982	28	,10186	402	,04760	187	,16316	617	,03953	172	,10538	402	,96610	92	,6
,7	,99010	28	,09784	400	,04573	186	,15699	614	,03781	172	,10136	400	,96702	93	,7
,8	,99038	28	,09384	398	,04387	185	,15085	611	,03609	170	,09736	398	,96795	93	,8
,9	,99066	28	,08986	396	,04202	184	,14474	608	,03439	169	,09338	396	,96888	94	,9
21,0	9,99094	28	0,08590	394	0,04018	183	0,13866	605	0,03270	168	0,08942	394	9,96982	94	21,0
,1	,99122	28	,08196	392	,03835	182	,13261	602	,03102	166	,08548	392	,97076	96	,1
,2	,99150	28	,07804	390	,03653	181	,12659	599	,02936	166	,08156	390	,97172	95	,2
,3	,99178	29	,07414	388	,03472	179	,12060	596	,02770	164	,07766	388	,97267	97	,3
,4	,99207	29	,07026	386	,03293	179	,11464	593	,02606	163	,07378	385	,97364	96	,4
21,5	9,99236	28	0,06640	384	0,03114	178	0,10871	590	0,02443	162	0,06993	384	9,97460	98	21,5
,6	,99264	30	,06256	381	,02936	176	,10281	588	,02281	161	,06609	382	,97558	98	,6
,7	,99294	29	,05875	380	,02760	175	,09693	584	,02120	160	,06227	380	,97656	98	,7
,8	,99323	29	,05495	379	,02585	175	,09109	582	,01960	158	,05847	378	,97754	98	,8
,9	,99352	29	,05116	376	,02410	173	,08527	579	,01802	158	,05469	376	,97853	99	,9
22,0	9,99381	30	0,04740	374	0,02237	173	0,07948	576	0,01644	156	0,05093	375	9,97953	100	22,0
,1	,99411	29	,04366	372	,02064	171	,07372	574	,01488	156	,04718	372	,98054	101	,1
,2	,99440	30	,03994	371	,01893	170	,06798	570	,01332	154	,04346	371	,98154	100	,2
,3	,99470	30	,03623	369	,01723	169	,06228	568	,01178	153	,03975	368	,98256	102	,3
,4	,99500	30	,03254	367	,01554	169	,05660	566	,01025	152	,03607	367	,98358	102	,4
22,5	9,99530	31	0,02887	365	0,01385	167	0,05094	562	0,00873	151	0,03240	365	9,98461	103	22,5
,6	,99561	30	,02522	363	,01218	167	,04532	561	,00722	150	,02875	364	,98564	103	,6
,7	,99591	31	,02159	361	,01051	165	,03971	557	,00572	149	,02511	361	,98668	104	,7
,8	,99622	30	,01798	360	,00886	165	,03414	555	,00423	148	,02150	360	,98773	105	,8
,9	,99652	31	,01438	358	,00721	164	,02859	552	,00275	147	,01790	358	,98878	105	,9
23,0	9,99683	31	0,01080	356	0,00557	162	0,02307	550	0,00128	146	0,01432	356	9,98984	106	23,0
,1	,99714	31	,00724	355	,00395	162	,01757	548	9,99982	145	,01076	355	,99090	106	,1
,2	,99745	31	,00369	353	,00233	161	,01209	545	,99837	144	,00721	353	,99197	107	,2
,3	,99776	31	0,00016	351	0,00072	160	,00664	542	,99693	143	,00368	351	,99304	107	,3
,4	,99807	31	9,99665	350	9,99912	159	0,00122	540	,99550	141	0,00017	349	,99413	109	,4

J	$\frac{\cos \frac{1}{2}\omega^4 \cos \frac{1}{2}i^4}{\cos \frac{1}{2}J^4}$		$\frac{\sin \omega^2(1-\frac{3}{2}\sin i^2)}{\sin J^2}$		$\frac{\sin \omega \cos \frac{1}{2}\omega^2 \cos \frac{1}{2}i^4}{\sin J \cos \frac{1}{2}J^2}$		$\frac{\sin \omega \sin \frac{1}{2}\omega^2 \cos \frac{1}{2}i^4}{\sin J \sin \frac{1}{2}J^2}$		$\frac{\sin \omega \cos \omega (1-\frac{3}{2}\sin i^2)}{\sin J \cos J}$		$\frac{\sin \omega^2 \cos \frac{1}{2}i^4}{\sin J^2}$		$\frac{(1-\frac{3}{2}\sin \omega^2)(1-\frac{3}{2}\sin i^2)}{(1-\frac{3}{2}\sin J^2)}$		J
23,5°	9,99839	31	9,99315	347	9,99753	158	9,99582	538	9,99409	141	9,99668	348	9,99522	109	23,5°
,6	,99870	32	,98968	347	,99595	157	,99044	535	,99268	140	,99320	346	,99631	110	,6
,7	,99902	32	,98621	344	,99438	156	,98509	532	,99128	139	,98974	345	,99741	111	,7
,8	,99934	32	,98277	343	,99282	156	,97977	531	,98989	138	,98629	343	,99852	112	,8
,9	,99966	32	,97934	341	,99126	154	,97446	528	,98851	137	,98286	341	9,99964	112	,9
24,0	9,99998	32	9,97593	340	9,98972	154	9,96918	525	9,98714	136	9,97945	340	0,00076	112	24,0
,1	0,00030	33	,97253	338	,98818	153	,96393	524	,98578	135	,97605	338	,00188	114	,1
,2	,00063	33	,96915	337	,98665	152	,95869	521	,98443	134	,97267	336	,00302	114	,2
,3	,00096	32	,96578	335	,98513	151	,95348	519	,98309	133	,96931	335	,00416	114	,3
,4	,00128	33	,96243	333	,98362	150	,94829	516	,98176	133	,96596	334	,00530	116	,4
24,5	0,00161	33	9,95910	332	9,98212	150	9,94313	515	9,98043	131	9,96262	332	0,00646	116	24,5
,6	,00194	33	,95578	330	,98062	148	,93798	512	,97912	130	,95930	330	,00762	116	,6
,7	,00227	33	,95248	329	,97914	148	,93286	509	,97782	130	,95600	329	,00878	118	,7
,8	,00260	34	,94919	327	,97766	147	,92777	508	,97652	128	,95271	327	,00996	117	,8
,9	,00294	33	,94592	326	,97619	146	,92269	506	,97524	128	,94944	326	,01113	119	,9
25,0	0,00327	34	9,94266	325	9,97473	146	9,91763	503	9,97396	127	9,94618	324	0,01232	119	25,0
,1	,00361	34	,93941	323	,97327	144	,91260	502	,97269	126	,94294	323	,01351	121	,1
,2	,00395	34	,93618	321	,97183	144	,90758	499	,97143	125	,93971	322	,01472	120	,2
,3	,00429	34	,93297	320	,97039	143	,90259	497	,97018	124	,93649	320	,01592	121	,3
,4	,00463	34	,92977	318	,96896	142	,89762	494	,96894	123	,93329	318	,01713	122	,4
25,5	0,00497	35	9,92659	318	9,96754	141	9,89268	493	9,96771	122	9,93011	317	0,01835	123	25,5
,6	,00532	34	,92341	315	,96613	141	,88775	491	,96649	122	,92694	316	,01958	124	,6
,7	,00566	35	,92026	315	,96472	140	,88284	489	,96527	120	,92378	314	,02082	124	,7
,8	,00601	35	,91711	312	,96332	139	,87795	487	,96407	120	,92064	313	,02206	125	,8
,9	,00636	34	,91399	312	,96193	138	,87308	484	,96287	119	,91751	312	,02331	125	,9
26,0	0,00670	36	9,91087	310	9,96055	138	9,86824	483	9,96168	118	9,91439	310	0,02456	126	26,0
,1	,00706	35	,90777	309	,95917	136	,86341	481	,96050	117	,91129	309	,02582	127	,1
,2	,00741	35	,90468	307	,95781	137	,85860	479	,95933	116	,90820	307	,02709	128	,2
,3	,00776	36	,90161	306	,95644	135	,85381	477	,95817	116	,90513	306	,02837	128	,3
,4	,00812	35	,89855	305	,95509	134	,84904	474	,95701	115	,90207	305	,02965	129	,4
26,5	0,00847	36	9,89550	303	9,95375	134	9,84430	473	9,95586	113	9,89902	303	0,03094	130	26,5
,6	,00883	36	,89247	303	,95241	133	,83957	471	,95473	113	,89599	302	,03224	131	,6
,7	,00919	36	,88944	300	,95108	133	,83486	470	,95360	112	,89297	301	,03355	131	,7
,8	,00955	36	,88644	300	,94975	131	,83016	467	,95248	112	,88996	300	,03486	132	,8
,9	,00991	36	,88344	298	,94844	131	,82549	465	,95136	110	,88696	298	,03618	133	,9
27,0	0,01027	37	9,88046	297	9,94713	130	9,82084	464	9,95026	110	9,88398	297	0,03751	133	27,0
,1	,01064	36	,87749	295	,94583	130	,81620	462	,94916	109	,88101	295	,03884	135	,1
,2	,01100	37	,87454	295	,94453	129	,81158	460	,94807	108	,87806	295	,04019	136	,2
,3	,01137	37	,87159	293	,94324	128	,80698	458	,94699	107	,87511	293	,04154	136	,3
,4	,01174	37	,86866	292	,94196	127	,80240	456	,94592	107	,87218	292	,04290	136	,4
27,5	0,01211	37	9,86574	290	9,94069	127	9,79784	454	9,94485	106	9,86926	290	0,04426	137	27,5
,6	,01248	37	,86284	290	,93942	126	,79330	453	,94379	105	,86636	289	,04563	138	,6
,7	,01286	38	,85994	288	,93816	125	,78877	451	,94274	104	,86347	289	,04701	139	,7
,8	,01323	37	,85706	287	,93691	125	,78426	449	,94170	103	,86058	287	,04840	140	,8
,9	,01361	38	,85419	285	,93566	124	,77977	447	,94067	103	,85771	285	,04980	140	,9
28,0	0,01398	37	9,85134	285	9,93442	123	9,77530	446	9,93964	102	9,85486	285	0,05120	142	28,0
,1	,01436	38	,84849	283	,93319	123	,77084	444	,93862	101	,85201	283	,05262	142	,1
,2	,01474	38	,84566	282	,93196	122	,76640	442	,93761	100	,84918	282	,05404	142	,2
,3	,01512	38	,84284	281	,93074	121	,76198	441	,93661	100	,84636	281	,05546	144	,3
,4	,01551	39	,84003	280	,92953	121	,75757	439	,93561	99	,84355	280	,05690	144	,4
28,5	0,01589	38	9,83723	279	9,92832	120	9,75318	437	9,93462	98	9,84075	279	0,05834	146	28,5
,6	,01628	39	,83444		,92712		,74881		,93364		,83796		,05980		,6

Nachtrag. Verfahren bei Ableitung der Koëfficienten für die Tiden aus einer kurzen Reihe von Beobachtungen.

Erstrecken sich die stündlichen Beobachtungen des Wasserstandes nur über einen kurzen Zeitraum, so trifft die Voraussetzung des im Vorhergehenden beschriebenen Verfahrens, dafs in den Mittelwerthen der Einfluſs aller Tiden mit Ausnahme der gesuchten verschwinde (S. 49), nicht zu, und man würde unrichtige Koëfficienten bekommen, wenn man diesen Umstand aufser Acht lassen würde. In diesem Falle kann man folgendes Verfahren anwenden, welches auch hinreichend bequem ist, um seine Anwendung lohnend zu machen.

Man leitet zunächst auf die im Vorhergehenden (§ 8) beschriebene Art den Koëfficienten der gröfsten Tide (in weitaus der Mehrzahl der Fälle die Tide M_2) ab und bildet nach demselben Verfahren die Mittelwerthe für die Tidestunden der nächst gröfsten Tide (S_2). Ehe man aber die Koëfficienten nach Schema B (S. 40) berechnet, bringt man an die Mittelwerthe für jede Stunde eine Korrektion an, durch welche ein etwaiger Restbetrag der Tide M_2 eliminirt wird, und leitet nun die Koëfficienten für die S_2-Tide ab, welche nun schon leidlich genau sein werden. Mit den so gefundenen Koëfficienten S_2 wird darauf eine Korrektion an die stündlichen Mittelwerthe für die M-Tide angebracht und die Koëfficienten für diese Tide abgeleitet, die nun in den meisten Fällen ebenfalls den wahren Werthen recht nahe kommen werden. In Ausnahmefällen, wenn die neuen Koëfficienten von den zuerst gefundenen stark abweichen, mufs das Verfahren wiederholt werden.

Die andern Tiden finden sich dann in gleicher Weise, indem man an die stündlichen Mittelwerthe Korrektionen für die beiden Tiden M_2 und S_2 anbringt.

Befinden sich unter diesen noch Tiden mit grofsen Koëfficienten, oder ist zufällig die Anzahl der zur Verfügung stehenden Beobachtungstage derart, dafs die Korrektion eine sehr grofse wird, so dafs ein Einfluſs auf die M_2- und S_2-Tiden zu erwarten ist, so ist die Rechnung für diese Tiden zu wiederholen.

Auf diese Weise wird man successive zu genauen Werthen für die Koëfficienten der Tiden gelangen.

Es ist jetzt noch zu zeigen, wie man die an die stündlichen Mittelwerthe anzubringenden Korrektionen findet.

Das strenge Verfahren würde offenbar das sein, den Betrag der zu eliminirenden Tide für jede Beobachtungsstunde zu berechnen und in Abzug zu bringen.[1]) Diese Art und Weise würde aber sehr weitläufig sein, kann indefs leicht so modificirt werden, dafs man schliefslich eine einfache Korrektion erhält, die an die Mittelwerthe für die einzelnen Tidestunden anzubringen ist. Wenn wir nämlich den Betrag der Tide statt für jede Beobachtungsstunde (mittlere Sonnenzeit) für jede Tidestunde berechnen, so begehen wir, indem wir diese Werthe von den Beobachtungen abziehen, einen Fehler, der sich jedoch infolge der Art, wie die Mittelwerthe gebildet werden, in diesen wieder ausgleicht. Stehen nämlich im Schema C (S. 43) für eine Tidestunde zwei Beobachtungen eingetragen, so wird von beiden dieselbe, der Tidestunde entsprechende, Korrektion abgezogen, diese ist aber für die eine Beobachtung zu grofs, für die andere um nahe ebenso viel zu klein, und da Aehnliches für alle eingetragenen Wasserstände gilt, so wird im Laufe einer längeren Reihe von Tagen der Fehler, welcher durch die Substituirung der Tidestunden an Stelle der Beobachtungsstunden entsteht, sich nahezu vollständig wieder ausgleichen, natürlich um so vollständiger, je länger die Beobachtungsreihe ist. Werden nun für die einzelnen Tidestunden die Korrektionen summirt und durch die Anzahl der Tidetage dividirt, so erhalten wir die Korrektion, welche an die Mittelwerthe für die einzelnen Tidestunden anzubringen ist.

Es sei nun $R \cos(\iota t - \zeta)$ der Ausdruck für die gegebene Tide, welche wir eliminiren wollen, und ι' die Aenderung des Arguments für die eintägige Komponente der gesuchten Tide in 1^h m. S.-Zeit, ebenso wie ι die Aenderung des Arguments der gegebenen Tide in derselben Zeit ist, dann ist

$$R \cos\left(\iota \frac{15}{\iota'} \tau - \zeta\right)$$

[1]) Dies Verfahren ist z. B. angewendet worden für die Reduktion der Beobachtungen in Beechey Island Erebus Bay im arktischen Archipel. S. „Report of the British Association", 1876, S. 290.

der Betrag der Tide für irgend eine Tidestunde τ, weil

$$1 \text{ Tidestunde} = \frac{15}{\iota'} \text{ S-Stunden.}$$

Wir haben daher an die im Schema C in den Rubriken für die einzelnen Tidestunden eingetragenen Wasserstände successive die folgenden Korrektionen anzubringen:

$$-R\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}0-\zeta\right), -R\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}.1-\zeta\right)\ldots -R\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}23-\zeta\right)$$
$$-R\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}24-\zeta\right), -R\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}25-\zeta\right)\ldots -R\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}47-\zeta\right)$$
$$-R\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}48-\zeta\right), -R\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}49-\zeta\right)\ldots -R\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}71-\zeta\right)$$
u. s. w. u. s. w.

oder allgemein die Korrektion:

$$(76) \qquad -R\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}\tau-\zeta+\iota\frac{15}{\iota'}24.\nu\right)$$

worin $\tau = 0, 1, 2, 3 \ldots 23$ die Tidestunde und $\nu = 0, 1, 2, 3 \ldots n$ den Tidetag (den ersten mit 0 bezeichnet) bedeuten.

Setzen wir $\iota . 24\frac{15}{\iota'} = m$, so erhalten wir den Ausdruck für die an den Mittelwerth für die Tidestunde τ anzubringende Korrektion, indem wir (76) zwischen den Grenzen $\nu = 0$ und $\nu = n$ summiren und durch die Anzahl der Tidetage oder durch $n + 1$ dividiren, nämlich:

$$(77) \qquad = -\frac{R}{n+1}\frac{\sin\frac{n+1}{2}m}{\sin{}^1/_2 m}\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}\tau-\zeta+\frac{n}{2}m\right)$$

Die Gröfse dieser Korrektion hängt, wie man sieht, in hohem Grade von der Gröfse von $\frac{\sin\frac{n+1}{2}m}{\sin{}^1/_2 m}$ ab, denn wenn $\sin {}^1/_2\, m$ klein ist, während $\sin\frac{n+1}{2}m$ nahe 1 wäre, so kann dieser Faktor sehr erheblich werden. Wäre z. B. $^1/_2\, m = 362°$ (oder 2°) und $n + 1 = 45$ Tidetage, so würde dieser Faktor = 28,6 sein, so dafs selbst eine kleine Tide einen erheblichen Einfluſs auf die für eine andere Tide gebildeten Mittelwerthe erhalten kann.

Hiernach muſs natürlich auch die Bemerkung auf S. 563 über den etwaigen Einfluſs anderer Tiden berichtigt werden.

Anstatt diese Korrektion (77) für jede Stunde zu berechnen, kann man auch die Summe bezw. Differenz der um 12 Stunden auseinanderliegenden Korrektionen ermitteln und diese an die in Rubrik III bezw. IV des Schema B (S. 40) stehenden Summen und Differenzen der Mittelwerthe anbringen. Dies giebt:

1. Korrektion der Summe der Mittelwerthe für τ_1 und $\tau_1 + 12^h$:

$$(78) \qquad = -2\frac{R}{n+1}\frac{\sin\frac{n+1}{2}m}{\sin{}^1/_2 m}\cos 6\frac{15}{\iota'}2\varkappa\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}\tau_1-\zeta+\frac{n}{2}m+6\frac{15}{\iota'}\iota\right)$$

2. Korrektion der Differenz der Mittelwerthe für τ_1 und $\tau_1 + 12^h$:

$$(79) \qquad = +2\frac{R}{n+1}\frac{\sin\frac{n+1}{2}m}{\sin{}^1/_2 m}\sin 6\frac{15}{\iota'}\iota\varkappa\sin\left(\iota\frac{15}{\iota'}\tau_1-\zeta+\frac{n}{2}m+6\frac{15}{\iota'}\iota\right)$$

worin $\tau_1 = 0, 1, 2, 3 \ldots 11$ zu setzen ist.

Sollen die Nebentiden mit abgeleitet werden, oder ist für eine Tide sowohl eine eintägige wie eine halbtägige Komponente vorhanden, so ist es am bequemsten nach Formel (77) die Korrektionen für jede Stunde zu berechnen, wird aber auf diese verzichtet, oder hat die Tide nur eine Komponente, so reducirt sich die Arbeit auf die Hälfte, wenn man nach Formel (78) bezw. (79) rechnet.

Die Gröfse $24\frac{15}{\iota'}$ oder die Länge eines Tidetages in mittlerer Sonnenzeit kann aus (63) entnommen werden, während ι sich in der „Uebersicht der Tiden", Tabelle A, findet.

Es sei z. B. gegeben die Tide S_2 und gesucht die Tide M, dann haben wir zu setzen $24\frac{15}{\iota'} = 24{,}84120$ und $\iota = 30°$ und es wird: $m = 745\overset{\circ}{,}2360 = 25\overset{\circ}{,}2360$ und $\frac{15}{\iota'}\iota = 31\overset{\circ}{,}0515$, ferner für $n = 73$: $\frac{n}{2}m = 201\overset{\circ}{,}1140$, $\frac{n+1}{2}m = 213\overset{\circ}{,}7320$. Nehmen wir das Beispiel Helgoland, wo $\log R = 9{,}38008$ und $\zeta = 39\overset{\circ}{,}7753$, so wird die Korrektionsformel:

$$= + 0{,}008234 \cos (31\overset{\circ}{,}0515 \,.\, \tau + 161\overset{\circ}{,}3387)$$

Näheres wird bei Gelegenheit der Bearbeitung der Beobachtungen auf Helgoland mitgetheilt werden.

Auf die Ableitung der Tiden von längerer Periode wird in diesem Falle in der Regel verzichtet werden müssen.

Nachdem Vorstehendes schon in Druck gegeben war, erhielt Vf. von Herrn Dr. C. Crone in Kopenhagen, mit welchem er über diesen Gegenstand korrespondirte, die Mittheilung, dafs derselbe bei seinen Arbeiten ein etwas anderes Verfahren als das oben vorgeschlagene anwenden werde, indem er die Korrektionen nicht an die stündlichen Mittelwerthe, sondern mit Hülfe von Formeln, welche in dem Briefe mitgetheilt waren, unmittelbar an die abgeleiteten Koëfficienten anbringen werde. Dies Verfahren hat so entschieden den Vorzug der Bequemlichkeit, dafs die dazu nöthigen Formeln hier noch einen Platz finden mögen.

Bezeichnen wir mit p den Index der nach (61), ohne Rücksicht auf etwaige Korrektionen wegen anderer Tiden, abgeleiteten Koëfficienten A_p, B_p (p kann also $= 1, 2, 3 \ldots 8$ sein), so ist die Korrektion, welche bei Ableitung von A_p an die einzelnen Glieder in den Summen (61) anzubringen ist:

$$(80)\quad \begin{cases} = -\frac{R}{n+1}\frac{\sin\frac{n+1}{2}m}{\sin{}^1\!/_2 m}\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}\tau - \zeta + \frac{n}{2}m\right)\cos 15\,p\,.\,\tau \\ = -\frac{R}{n+1}\frac{\sin\frac{n+1}{2}m}{2\sin{}^1\!/_2 m}\left[\cos\left(\left(15\,p - \iota\frac{15}{\iota'}\right)\tau + \zeta - \frac{n}{2}m\right) + \cos\left(\left(15\,p + \iota\frac{15}{\iota'}\right)\tau - \zeta + \frac{n}{2}m\right)\right] \end{cases}$$

und bei Ableitung von B_p:

$$(81)\quad \begin{cases} = -\frac{R}{n+1}\frac{\sin\frac{n+1}{2}m}{\sin{}^1\!/_2 m}\cos\left(\iota\frac{15}{\iota'}\tau - \zeta + \frac{n}{2}m\right)\sin 15\,p\,.\,\tau \\ = -\frac{R}{n+1}\frac{\sin\frac{n+1}{2}m}{2\sin{}^1\!/_2 m}\left[\sin\left(\left(15\,p - \iota\frac{15}{\iota'}\right)\tau + \zeta - \frac{n}{2}m\right) + \sin\left(\left(15\,p + \iota\frac{15}{\iota'}\right)\tau - \zeta + \frac{n}{2}m\right)\right] \end{cases}$$

Werden (80) und (81) zwischen den Grenzen $\tau = 0$ und $\tau = 23$ summirt und durch 12 dividirt, so erhalten wir die Korrektionen, welche an A_p und B_p selbst anzubringen sind. Dies giebt:

$$(82)\quad \begin{cases} \text{Korrektion an } A_p \\ = -\frac{R}{24\,(n+1)}\frac{\sin\frac{n+1}{2}m}{\sin{}^1\!/_2 m}\left[\frac{\sin 12\left(15\,p - \iota\frac{15}{\iota'}\right)}{\sin{}^1\!/_2\left(15\,p - \iota\frac{15}{\iota'}\right)}\cos\left(\frac{23}{2}\left(15\,p - \iota\frac{15}{\iota'}\right) + \zeta - \frac{n}{2}m\right)\right. \\ \left. + \frac{\sin 12\left(15\,p + \iota\frac{15}{\iota'}\right)}{\sin{}^1\!/_2\left(15\,p + \iota\frac{15}{\iota'}\right)}\cos\left(\frac{23}{2}\left(15\,p + \iota\frac{15}{\iota'}\right) - \zeta + \frac{n}{2}m\right)\right] \\ \text{Korrektion an } B_p \\ = -\frac{R}{24\,(n+1)}\frac{\sin\frac{n+1}{2}m}{\sin{}^1\!/_2 m}\left[\frac{\sin 12\left(15\,p - \iota\frac{15}{\iota'}\right)}{\sin{}^1\!/_2\left(15\,p - \iota\frac{15}{\iota'}\right)}\sin\left(\frac{23}{2}\left(15\,p - \iota\frac{15}{\iota'}\right) + \zeta - \frac{n}{2}m\right)\right. \\ \left. + \frac{\sin 12\left(15\,p + \iota\frac{15}{\iota'}\right)}{\sin{}^1\!/_2\left(15\,p + \iota\frac{15}{\iota'}\right)}\sin\left(\frac{23}{2}\left(15\,p + \iota\frac{15}{\iota'}\right) - \zeta + \frac{n}{2}m\right)\right] \end{cases}$$

Sehr häufig wird man sich damit begnügen können, nur das erste Glied dieser Ausdrücke zu berechnen. Diese Methode der Verbesserung läfst gewifs nichts zu wünschen übrig, selbst wenn man genöthigt sein sollte, wegen der Gröfse der gegenseitigen Korrektionen dieselben mehrfach berechnen zu müssen, weil dadurch im Wesentlichen nur das R beeinflufst wird.

Man könnte (82) noch so umformen, dafs man anstatt R und ζ der zu eliminirenden Tide, die unmittelbar gefundenen Koëfficienten A und B benutzte, zu welchem Zwecke man nur ζ durch Auflösung der cos und sin herauszuschaffen hätte, indessen scheint die obige Form doch die bequemste und übersichtlichste zu sein, obwohl sie die vorherige Berechnung von R und ζ voraussetzt.

Gedruckt in der Königlichen Hofbuchdruckerei von E. S. Mittler & Sohn in Berlin, Kochstrasse 69. 70.